Определители

1. Вычислите определители:

$$(\mathbf{а})\ \begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}, \quad (\mathbf{б})\ \begin{vmatrix} n & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите определители:

$$(\mathbf{а})\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad (\mathbf{б})\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 3 & 6 & \dots & C_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & C_{n+1}^2 & \dots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

3. Вычислите определитель матрицы (a_{ij}), если (**а**) $a_{ij} = \min(i,j)$; (**б**) $a_{ij} = \min(i^2, j^2)$.

4. Вычислите определитель матрицы (a_{ij}), если $a_{ij} = \text{НОД}(i,j)$.

5. Вычислите определители (первый из них называется *определителем Вандермонда*):

$$(\mathbf{а})\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}, \quad (\mathbf{б})\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{j-1} & x_1^{j-1} & \dots & x_n^{j-1} \\ x_0^{j+1} & x_1^{j+1} & \dots & x_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n+1} & x_1^{n+1} & \dots & x_n^{n+1} \end{vmatrix}.$$

6. (Продолжение) Какая матрица обратна матрице Вандермонда?

7. (Определитель с углом нулей) Пусть A, D — квадратные матрицы. Докажите, что

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D|.$$