Квадратичные формы

1. Матрица билинейной формы f в базисе e_1, e_2 имеет вид $\left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{smallmatrix}\right)$.

(**а**) Вычислите $f(e_1 - e_2, e_1 + 2e_2)$. (**б**) Найдите матрицу f в базисе $e_1 + e_2$, $e_1 - 3e_2$. (**в**) Найдите левое и правое ядро этой формы (левое ядро формы состоит из векторов v, таких что $f(v, w) = 0$ при всех w; аналогично определяется правое ядро).

2. (**а**) Докажите, что каждую билинейную функцию можно единственным образом представить в виде суммы симметрической и кососимметрической. (**б**) Найдите размерность пространств симметрических и кососимметрических билинейных функций на n-мерном пространстве V.

3. (**а**) Вычислите сигнатуру квадратичной формы $2xy$ (на двумерном пространстве). (**б**) Найдите канонический вид квадратичной формы $2x^2 - 2xy + 2xz + 3z^2$.

4. (**а**) Докажите, что для любого рационального числа r уравнение $x^2 - y^2 = r$ разрешимо в рациональных числах.

(**б**) Пусть f — невырожденная квадратичная форма на векторном пространстве V над полем K. Докажите, что если существует ненулевой вектор $v \in V$, для которого $f(v) = 0$, то f принимает все значения из K.

5. Билинейная форма $f(x, y)$ на пространстве V такова, что из $f(x, y) = 0$ следует $f(y, x) = 0$. Докажите, что эта форма либо симметрическая, либо кососимметрическая.

6. Постройте ортонормированный базис для квадратичной формы $\int\limits_{-1}^{1} f^2(x)\,dx$ на пространстве многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше d для (**а**) $d = 4$; (**б**) любого d. (Напоминание: $\int_{-1}^{1} x^j\,dx = \frac{1}{j+1}(1 - (-1)^{j+1})$.)

7. Вычислите сигнатуру квадратичной формы (**а**) $g_1(A) = \mathrm{tr}({}^t\!AA)$; (**б**) $g_2(A) = \mathrm{tr}(A^2)$ на пространстве матриц $n \times n$.

8. Рассмотрим евклидово пространство V; пусть $(\cdot,\cdot)$ — соответствующая билинейная форма. Обозначим $|v| = \sqrt{(v, v)}$. Докажите следующие утверждения: (**а**) (неравенство Коши – Буняковского – Шварца – ...) $(v_1, v_2)^2 \leqslant |v_1|^2 |v_2|^2$; (**б**) (неравенство треугольника) $|v_1 + v_2| \leqslant |v_1| + |v_2|$.

9. Докажите аналоги теорем об ортогональном базисе и сигнатуре для эрмитовых пространств.