Гомологии

Часть 1. Комплексы

Определение 1.1. Комплексом векторных пространств называется (конечная или бесконечная) последовательность векторных пространств и линейных отображений

$$\dots \xrightarrow{d^{i-1}} C^i \xrightarrow{d^i} C^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} C^{i+2} \xrightarrow{d^{i+2}} \dots, \qquad \text{в которой } \boxed{d^{i+1} \circ d^i = 0} \text{ для всех } i \in \mathbb{Z}.$$

Пространство C^i называется i-ым членом комплекса $(C^\bullet, d^\bullet)$, а гомоморфизм d^i — i-ым дифференциалом.

Замечание 1.2. Аналогично определяется комплекс абелевых групп, модулей над фиксированным кольцом, и т.д. Кроме того, заменяя условие $d^{i+1} \circ d^i = 0$ условием $d^{i+1} \circ d^i = 1$ можно определить комплекс групп.

Замечание 1.3. Можно также сказать, что комплекс — это векторное пространство $C^\bullet$

- $\mathbb{Z}$-градуированное, то есть разложенное в прямую сумму $C^\bullet = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} C^i$,
- снабженное дифференциалом $d : C^\bullet \to C^\bullet$, повышающим градуировку на единицу, т.е. $d(C^i) \subset C^{i+1}$,
- с условием $\boxed{d \circ d = 0}$.

Такие комплексы называют когомологическими или коцепными. Помимо них используются и гомологические или цепными комплексы, которые отличаются тем, что в них дифференциал понижает градуировку (градуировка в гомологических комплексах обозначается нижним индексом).

Примеры 1.4.
1. Пусть X — топологическое пространство, а $C_p(X)$ — группа сингулярных p-цепей (свободная абелева группа, порожденная множеством всех непрерывных отображений из p-мерного стандартного симплекса Δ^p в X), а $d = \partial$ — отображение взятия границы (p-мерному симплексу сопоставляется знакопеременная сумма его $(p-1)$-мерных граней). Тогда $(C_\bullet(X), \partial)$ — (гомологический) комплекс абелевых групп, который называется комплексом сингулярных цепей пространства X.
2. Пусть $C^p(X) := C_p(X)^* = \mathrm{Hom}(C_p(X), \mathbb{Z})$ — группа сингулярных p-коцепей, а $d = \partial^*$ — отображение кограницы. Тогда $(C^\bullet(X), \partial^*)$ — (когомологический) комплекс абелевых групп, который называется комплексом сингулярных коцепей пространства X.
3. Пусть X — гладкое многообразие, $\Omega^p X$ — пространство гладких дифференциальных p-форм на X, а $d^p : \Omega^p X \to \Omega^{p+1} X$ — внешний дифференциал. Тогда $(\Omega^\bullet X, d^\bullet)$ — комплекс векторных пространств, который называется комплексом де Рама.

Определение 1.5. Пусть $(C^\bullet, d^\bullet)$ — комплекс векторных пространств. Подпространства $Z^i = \mathrm{Ker}\, d^i \subset C^i$ и $B^i = \mathrm{Im}\, d^{i-1} \subset C^i$ называются пространством i-коциклов и пространством i-кограниц соответственно.

Лемма 1.6. *Всякая кограница является коциклом, то есть $B^i \subset Z^i$.*

Доказательство: $x \in B^i \Longrightarrow x = d^{i-1}(y) \Longrightarrow d^i(x) = d^i(d^{i-1}(y)) = (d^i \circ d^{i-1})(y) = 0 \Longrightarrow x \in Z^i$. □

Определение 1.7. Факторпространство $H^i = H^i(C^\bullet, d^\bullet) := Z^i/B^i$ называется пространством i-ых когомологий комплекса $(C^\bullet, d^\bullet)$. Для гомологического комплекса $(C_\bullet, d_\bullet)$ анлогичным образом определяется понятие циклов $Z_i = \mathrm{Ker}\, d_i$, границ $B_i = \mathrm{Im}\, d_{i+1}$ и гомологий $H_i = H_i(C_\bullet, d_\bullet) := Z_i/B_i$. Для всякого (ко)цикла $x \in Z^i$ будем обозначать его класс (ко)гомологий через $\bar{x} \in H^i$.

Примеры 1.8.
1. Гомологии комплекса $(C_\bullet(X), \partial)$ называются сингулярными гомологиями пространства X и обозначаются $H_i(X, \mathbb{Z})$. Когомологии комплекса $(C^\bullet(X), \partial^*)$ называются сингулярными когомологиями пространства X и обозначаются $H^i(X, \mathbb{Z})$.
2. Пусть F — произвольная абелева группа. Гомологии комплекса $(C_\bullet(X) \otimes_{\mathbb{Z}} F, \partial \otimes \mathrm{Id}_F)$ называются сингулярными гомологиями с коэффициентами в F пространства X и обозначаются $H_i(X, F)$. Когомологии комплекса $(\mathrm{Hom}(C_\bullet(X), F), \partial^*)$ называются сингулярными когомологиями с коэффициентами в F пространства X и обозначаются $H^i(X, F)$.
3. Когомологии комплекса де Рама называются когомологиями де Рама и обозначаются $H^i_{DR}(X)$. Теорема де Рама утверждает, что $H^i_{DR}(X) \cong H^i(X, \mathbb{R})$.

Определение 1.9. Комплекс $C^\bullet$ называется ацикличным комплексом или точной последовательностью, если $H^i(C^\bullet) = 0$ при всех i. Иначе говоря, если $Z^i = B^i$, то есть $\operatorname{Ker} d^i = \operatorname{Im} d^{i-1}$.

Примеры 1.10.
1. Комплекс $0 \to A \to 0$ точен $\iff A = 0$.
2. Комплекс $0 \to A \xrightarrow{f} B \to 0$ точен $\iff f$ — изоморфизм.
3. Комплекс $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ точен $\iff f$ — мономорфизм, g — эпиморфизм и $\operatorname{Ker} g = f(A)$ (следовательно, $C = B/A$). Такие точные последовательности называются точными тройками или короткими точными последовательностями.

Часть 2. Лемма о змее

Определение 2.1. Морфизмом комплексов $f^\bullet : E^\bullet \to F^\bullet$ называется набор морфизмов $f^i : E^i \to F^i$, такой что $d^i_F \circ f^i = f^{i+1} \circ d^i_E$ для всех i.

Лемма 2.2. *Если $f^\bullet : E^\bullet \to F^\bullet$ — морфизм комплексов, то $f^i(Z^i(E^\bullet)) \subset Z^i(F^\bullet)$, $f^i(B^i(E^\bullet)) \subset B^i(F^\bullet)$.*

Доказательство: если $x \in Z^i(E^\bullet)$, то $d^i_F(f^i(x)) = f^{i+1}(d^i_A(x)) = 0$, то есть $f^i(x) \in Z^i(F^\bullet)$. Если же $x \in B^i(E^\bullet)$, то есть $x = d^{i-1}_E(y)$, то $f^i(x) = f^i(d^{i-1}_A(y)) = d^{i-1}_B(f^{i-1}(y)) \in B^i(F^\bullet)$. □

Пусть $f^\bullet : E^\bullet \to F^\bullet$ — морфизм копмлексов, а $h \in H^i(E^\bullet) = Z^i(E^\bullet)/B^i(E^\bullet)$ — класс когомологий. Выберем коцикл $x \in Z^i(E^\bullet)$, представляющий класс h и рассмотрим элемент $f^i(x) \in F^i$. Согласно предыдущей лемме $f^i(x)$ является коциклом, причем при замене коцикла x другим коциклом, представляющим тот же класс когомологий, коцикл $f^i(x)$ изменится на кограницу. Следовательно, класс когомологий коцикла $f^i(x)$ зависит лишь от класса h. Таким образом, всякий морфизм комплексов индуцирует морфизм когомологий $H^i(E^\bullet) \to H^i(F^\bullet)$, который обозначается $H^i f^\bullet$, такой что
$$H^i f(\bar{x}) = \overline{f^i(x)}.$$

Упражнение 2.3. Покажите, что $H^i f$ является гомоморфизмом.

Пусть $0 \to E^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} F^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} G^\bullet \to 0$ — точная тройка комплексов (то есть $f^\bullet$ и $g^\bullet$ — морфизмы комплексов, а последовательности $0 \to E^i \xrightarrow{f^i} F^i \xrightarrow{g^i} G^i \to 0$ точны при всех i). Рассмотрим произвольный класс когомологий $h \in H^i(G^\bullet)$ и проделаем следующую последовательность операций:

1. выберем $x \in G^i$, такой что $\bar{x} = h$ (заметим, что $d^i_G(x) = 0$);
2. выберем $x' \in F^i$, такой что $g^i(x') = x$ (это возможно, так как g^i — эпиморфизм);
3. положим $x'' := d^i_F(x'')$;
4. выберем $x''' \in E^{i+1}$, такой что $f^{i+1}(x''') = x''$ (это возможно, так как $g^{i+1}(x'') = g^{i+1}(d^i_F(x')) = d^i_G(g^i(x')) = d^i_G(x) = 0$, то есть $x'' \in \operatorname{Ker} g^{i+1} = \operatorname{Im} f^{i+1}$).

Лемма 2.4. *Элемент x''' является коциклом, а его класс когомологий $\overline{x'''}$ зависит лишь от класса $\bar{x}$, и не зависит от произвола в производимых выборах.*

Доказательство: $f^{i+2}(d^{i+1}_E(x''')) = d^{i+1}_F(f^{i+1}(x''')) = d^{i+1}_F(x'') = d^{i+1}_F(d^i_F(x')) = 0$, поэтому, так как f^{i+2} — мономорфизм, то $d^{i+1}_E(x''') = 0$, то есть x''' — коцикл.

Изучим теперь насколько x''' зависит от произвола в выборах. Во-первых, выбор элемента x''' на шаге (4) однозначен в силу мономорфности морфизма f^{i+1}, стало быть здесь произвола нет. Во-вторых, произвол в выборе элемента x' на шаге (2) сводится к замене $x' \mapsto x' + f^i(y)$, которая влечет замену $x'' \mapsto x'' + d^i_F(f^i(y)) = x'' + f^{i+1}(d^i_E(y)) = f^{i+1}(x''' + d^i_E(y))$ и, следовательно, $x''' \mapsto x''' + d^i_E(y)$, то есть x''' меняется на кограницу, а класс $\overline{x'''}$ не меняется. Наконец, произвол в выборе элемента x на шаге (1) сводится к замене $x \mapsto x + d^{i-1}_G(z) = x + d^{i-1}_G(g^{i-1}(z')) = x + g^i(d^{i-1}_F(z'))$, где $z' \in F^{i-1}$, которая на шаге (2) сводится к замене $x' \mapsto x' + d^{i-1}_F(z')$, а на шаге (3) — к замене $x'' \mapsto x'' + d^i_F(d^{i-1}_F(z')) = x''$, то есть элемент x'' не меняется. □

Итак, описанная выше конструкция дает отображение $\delta : H^i(G^\bullet) \to H^{i+1}(E^\bullet)$, называемое связывающим гомоморфизмом
$$\delta(\bar{x}) = \overline{x'''}.$$

Упражнение 2.5. Покажите, что δ является гомоморфизмом.

Теорема 2.6. *Если* $0 \to E^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} F^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} G^\bullet \to 0$ *— точная тройка комплексов, то последовательность когомологий* $\dots \to H^i(E^\bullet) \xrightarrow{H^i f} H^i(F^\bullet) \xrightarrow{H^i g} H^i(G^\bullet) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(E^\bullet) \xrightarrow{H^{i+1} f} H^{i+1}(F^\bullet) \to \dots$ *точна.*

Доказательство: нам нужно проверить, что это комплекс, причем ацикличный.

- $(H^i g \circ H^i f)(\bar{x}) = \overline{g^i(f^i(x))} = \bar{0} = 0$;
- если $\bar{x} = H^i g(\bar{y})$, то $x = g^i(y)$, $x' = y$, $x'' = d_F^i(y) = 0$, $x''' = 0$ и $\delta(\bar{x}) = \bar{x'''} = 0$;
- $(H^{i+1} f \circ \delta)(\bar{x}) = \overline{f^{i+1}(x''')} = \overline{x''} = \overline{d_F^i(x')} = 0$.
- **Точность в** $H^i(F^\bullet)$**:** если $H^i g(\bar{x}) = 0$, то $g^i(x) = d_G^{i-1}(y) = d_G^{i-1}(g^{i-1}(y')) = g^i(d_F^{i-1}(y'))$, значит $g^i(x - d_F^{i-1}(y')) = 0$, то есть $x - d_F^{i-1}(y') = f^i(z)$ и $\bar{x} = \overline{f^i(z) + d_F^{i-1}(y')} = \overline{f^i(z)} = H^i f(\bar{z})$.
- **Точность в** $H^i(G^\bullet)$**:** если $\delta\bar{x} = 0$, то $x''' = d_E^i(y)$, значит $x'' = f^{i+1}(x''') = f^{i+1}(d_E^i(y)) = d_F^i(f^i(y))$, но $x'' = d_F^i(x')$, значит $d_F^i(x' - f^i(y)) = 0$, значит $\bar{x} = \overline{g^i(x')} = \overline{g^i(x' - f^i(y))} = H^i g(x' - f^i(y))$.
- **Точность в** $H^{i+1}(E^\bullet)$**:** если $H^{i+1} f(\bar{y}) = 0$, то $f^{i+1}(y) = d_F^i(z)$, значит, $d_G^i(g^i(z)) = g^{i+1}(d_F^i(z)) = g^{i+1}(f^{i+1}(y)) = 0$, и полагая $x := g^i(z)$, получаем $x' = z$, $x'' = d_F^i(z) = f^{i+1}(y)$ и $x''' = y$, т.е. $\bar{y} = \delta(\bar{x})$.

□

Часть 3. Когомологии групп

Пусть G — конечная группа. G-**модулем** будем называть абелеву группу, на которой задано линейное левое действие группы G. Иначе говоря, G-модуль — это левый модуль над групповой алгеброй $\mathbb{Z}[G]$.

Для каждого n рассмотрим свободную абелеву группу $F_n := \mathbb{Z}\langle G^{n+1}\rangle = \mathbb{Z}\langle G \times G \times \dots \times G\rangle$, порожденную множеством G^{n+1}. Диагональное действие G на G^{n+1} индуцирует на F_n структуру G-модуля.

Лемма 3.1. *F_n является свободным G-модулем.*

Доказательство: группа G переставляет базисные (над $\mathbb{Z}$) элементы $e_{g_0,\dots,g_n} \in F_n$, действуя на базисе свободно. Выбирая в каждой из орбит по представителю (например, $e_{1,g_1,\dots,g_n}$) получаем базис F_n над $\mathbb{Z}[G]$. □

Ясно, что при всех $i, n \in \mathbb{Z}$ проекция $p_{n,i} : G^{n+1} \to G^n$, $(g_0, \dots, g_n) \mapsto (g_0, \dots, g_{i-1}, \hat{g}_i, g_{i+1}, \dots, g_n)$ (забывание i-ой координаты) коммутирует с действием группы G, следовательно индуцирует гомоморфизм G-модулей $\partial_{n,i} : F_n \to F_{n-1}$, $e_{g_0,\dots,g_n} \mapsto e_{g_0,\dots,g_{i-1},\hat{g}_i,g_{i+1},\dots,g_n}$.

Лемма 3.2. *Имеем $\partial_{n-1,i} \circ \partial_{n,j} = \partial_{n-1,j-1} \circ \partial_{n,i}$ при $i < j$ и $\partial_{n-1,i} \circ \partial_{n,j} = \partial_{n-1,j} \circ \partial_{n,i+1}$ при $i \geqslant j$.*

Доказательство: очевидная проверка. □

Положим теперь $\partial_n := \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_{n,i}$.

Лемма 3.3. *$(F_\bullet, \partial_\bullet)$ — комплекс G-модулей.*

Доказательство: $\partial_{n-1} \circ \partial_n = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \partial_{n-1,i} \circ \partial_{n,j} + \sum_{i \geqslant j} (-1)^{i+j} \partial_{n-1,i} \circ \partial_{n,j} = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \partial_{n-1,i} \circ \partial_{n,j} + \sum_{i \geqslant j} (-1)^{i+j} \partial_{n-1,j} \circ \partial_{n,i+1}$ и ясно, что слагаемое (i, j) из первой суммы сокращается со слагаемым $(j-1, i)$ из второй суммы. □

Лемма 3.4. *Комплекс $(F_\bullet)$ ацикличен вне члена F_0, а $H_0(F_\bullet) \cong \mathbb{Z}$ с тривиальной структурой G-модуля.*

Доказательство: дополним комплекс $F_\bullet$ членом $F_{-1} = \mathbb{Z}e_\emptyset$ и рассмотрим отображение $h_n : F_n \to F_{n+1}$, $e_{g_0,\dots,g_n} \mapsto e_{1,g_0,\dots,g_{n+1}}$. Легко видеть, что $h_{n-1}\partial_n + \partial_{n+1}h_n = \mathrm{Id}_{F_n}$, поэтому если $\partial_n(x) = 0$, то $x = \partial_{n+1}(h_n(x))$. Значит, дополненный комплекс ацикличен, а когомология исходного комплекса совпадает с $F_{-1} \cong \mathbb{Z}$. □

Ацикличный комплекс $(F_\bullet, \partial_\bullet)$ называется **стандартной резольвентой** для группы G.

Пусть M — произвольный G-модуль. Применяя к стандартной резольвенте функторы $- \otimes_G M$ и $\mathrm{Hom}_G(-, M)$ получаем комплексы (по функториальности) абелевых групп

$$0 \leftarrow F_0 \otimes_G M \leftarrow F_1 \otimes_G M \leftarrow F_2 \otimes_G M \leftarrow \dots \quad \text{и} \quad 0 \to \mathrm{Hom}_G(F_0, M) \to \mathrm{Hom}_G(F_1, M) \to \mathrm{Hom}_G(F_2, M) \to \dots,$$

Определение 3.5. Группа $H_i(G, M) := H_i(F_\bullet \otimes_G M)$ называется **группой гомологий группы G с коэффициентами в G-модуле M**. Группа $H^i(G, M) := H^i(\mathrm{Hom}_G(F_\bullet, M))$ называется **группой гомологий группы G с коэффициентами в G-модуле M**.