2 Курс, Алгебра 3
22.09.2003

Когомологии групп

Часть 1. Когомологии групп

Напомним определение (ко)гомологий групп. Стандартной резольвентой для группы G называется комплекс G-модулей $0 \leftarrow F_0 \xleftarrow{\partial} F_1 \xleftarrow{\partial} F_2 \xleftarrow{\partial} \dots$, где $F_n := \mathbb{Z}\langle G^{n+1}\rangle$, а $\partial(e_{g_0,\dots,g_n}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i e_{g_0,\dots,\hat{g_i},\dots,g_n}$. Далее, для всякого левого G-модуля M рассматриваются два комплекса абелевых групп:

$$0 \leftarrow F_0 \otimes_G M \overset{\partial}{\leftarrow} F_1 \otimes_G M \overset{\partial}{\leftarrow} F_2 \otimes_G M \overset{\partial}{\leftarrow} \dots \quad \text{и} \quad 0 \to \mathrm{Hom}_G(F_0, M) \overset{\partial^*}{\to} \mathrm{Hom}_G(F_1, M) \overset{\partial^*}{\to} \mathrm{Hom}_G(F_2, M) \overset{\partial^*}{\to} \dots,$$

(в первом случае мы пользуемся структурой правых G-модулей на F_n, а во втором — структурой левых G-модулей). Соответственно, (ко)гомологиями группы G с коэффициентами в M называются (ко)гомологии этих комплексов: $H_i(G, M) := H_i(F_\bullet \otimes_G M)$, $H^i(G, M) := H^i(\mathrm{Hom}_G(F_\bullet, M))$.

Лемма 1.1. *Имеем* $H_0(G, M) \cong M_G := M/\langle m - gm\rangle_{g\in G, m\in M}$, $H^0(G, M) \cong M^G = \{\, m \in M \mid gm = m\ \forall g \in G\,\}$.

Доказательство: F_0 — свободный G-модуль ранга 1, поэтому $F_0 \otimes_G M \cong M$, а F_1 — свободный G-модуль с базисом $(e_{1,g})_{g\in G}$ над $\mathbb{Z}[G]$, поэтому $F_1 \otimes_G M \cong \oplus_{g\in G}(e_{1,g} \otimes M)$, а $\partial(e_{1,g} \otimes m) = gm - m$.

Аналогично, $\mathrm{Hom}_G(F_0, M) \cong M$: всякому $m \in M$ соответствует отображение $f_m : e_g \mapsto gm$. Ясно, что $\partial^*(f_m)(e_{g_0,g_1}) = f_m(\partial(e_{g_0,g_1})) = f_m(e_{g_1} - e_{g_0}) = g_1 m - g_0 m$, поэтому $H^0(G, M) = \mathrm{Ker}\, \partial^* = M^G$. □

Лемма 1.2. *Существует изоморфизм* $\mathrm{Hom}_G(F_n, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\langle G^n\rangle, M)$*, при котором* ∂^* *принимает вид*

$$(\partial^* f)(g_1, \dots, g_{n+1}) = g_1 f(g_2, \dots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(\dots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \dots) + (-1)^{n+1} f(g_1, \dots, g_n). \qquad (*)$$

Доказательство: выберем в качестве базиса модуля $\mathbb{Z}\langle G^{n+1}\rangle$ над $\mathbb{Z}[G]$ векторы $e_{1,g_1,g_1g_2,\dots,g_1\cdots g_n}$. Каждый G-гомоморфизм $\mathbb{Z}\langle G^{n+1}\rangle \to M$ однозначно определяется своими значениями на этих векторах. Переписывая в этих терминах определение, получаем формулу $(*)$.

$$\begin{aligned}(\partial^* f)(g_1, \dots, g_{n+1}) &= (\partial^* f)(e_{1,g_1,g_1g_2,\dots,g_1\cdots g_{n+1}}) = \\ &f(e_{g_1,g_1g_2,\dots,g_1\cdots g_{n+1}}) + \textstyle\sum_{i=1}^n (-1)^i f(e_{1,\dots,g_1\cdots g_{i-1},g_1\cdots g_{i+1},\dots}) + (-1)^{n+1} f(e_{1,g_1,g_1g_2,\dots,g_1\cdots g_n}) = \\ &g_1 f(g_2, \dots, g_{n+1}) + \textstyle\sum_{i=1}^n (-1)^i f(\dots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \dots) + (-1)^{n+1} f(g_1, \dots, g_n).\end{aligned}$$

□

Следствие 1.3. *Имеем* $H^1(G, M) = \{\, f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\langle G\rangle, M) \mid f(g_1g_2) = g_1 f(g_2) + f(g_1)\,\}/\{\, f \mid f(g_1) = g_1 f_0 - f_0\,\}$; $H^2(G, M) = \{\, f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\langle G^2\rangle, M) \mid f(g_1g_2, g_3) + f(g_1, g_2) = g_1 f(g_2, g_3) + f(g_1, g_2g_3)\,\}/\{\, g_1 f(g_2) - f(g_1g_2) + f(g_1)\,\}$.

Часть 2. Свойства когомологий

Лемма 2.1. (i) *(Ко)гомологии являются ковариантными функторами* $G\text{-Mod} \to \mathcal{A}b$.
(ii) *(Ко)гомологии коммутируют с прямыми суммами.*
(iii) $H_i(G, \mathbb{Z}[G]) = H^i(G, \mathbb{Z}[G]) = 0$ *при* $i > 0$. (iv) $H_0(G, \mathbb{Z}[G]) = H^0(G, \mathbb{Z}[G]) = \mathbb{Z}$.

Доказательство: первое утверждение следует из функториальности операций $F_\bullet \otimes_G -$ и $\mathrm{Hom}_G(F_\bullet, -)$, а второе — из того, что функторы $F_\bullet \otimes_G -$, $\mathrm{Hom}_G(F_\bullet, -)$, $H_i(-)$ и $H^i(-)$ коммутируют с прямыми суммами. Третье утверждение следует из того, что функтор $- \otimes_G \mathbb{Z}[G]$ есть забывание структуры G-модуля, а функтор $\mathrm{Hom}_G(-, \mathbb{Z}[G])$ есть двойственность в категории абелевых групп. Наконец, последнее утверждение получается применением леммы 1.1:

$$H_0(G, \mathbb{Z}[G]) = \mathbb{Z}[G]_G = \mathbb{Z}[G]/\langle e_1 - e_g\rangle_{g\in G} = \mathbb{Z}, \quad H^0(G, \mathbb{Z}[G]) = \mathbb{Z}[G]^G = \{\, \sum a_g e_g \mid \forall g \in G\ a_g = a_1\,\} = \mathbb{Z}.$$

□

Теорема 2.2. *Пусть* $0 \to M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \to 0$ *— точная тройка* G*-модулей. Тогда возникают точные последовательности*

$$\dots \xrightarrow{\delta} H_1(G, M_1) \xrightarrow{H_1 f_1} H_1(G, M_2) \xrightarrow{H_1 f_2} H_1(G, M_3) \xrightarrow{\delta} H_0(G, M_1) \xrightarrow{H_0 f_1} H_0(G, M_2) \xrightarrow{H_0 f_2} H_0(G, M_3) \to 0,$$

$$0 \to H^0(G, M_1) \xrightarrow{H^0 f_1} H^0(G, M_2) \xrightarrow{H^0 f_2} H^0(G, M_3) \xrightarrow{\delta} H^1(G, M_1) \xrightarrow{H^1 f_1} H^1(G, M_2) \xrightarrow{H^1 f_2} H^1(G, M_3) \xrightarrow{\delta} \dots,$$

где δ *— связывающий гомоморфизм.*

Доказательство: G-модуль F_n свободен, поэтому последовательности комплексов

$0 \to F_\bullet \otimes_G M_1 \xrightarrow{f_1} F_\bullet \otimes_G M_2 \xrightarrow{f_2} F_\bullet \otimes_G M_3 \to 0$ и $0 \to \mathrm{Hom}_G(F_\bullet, M_1) \xrightarrow{f_1} \mathrm{Hom}_G(F_\bullet, M_2) \xrightarrow{f_2} \mathrm{Hom}_G(F_\bullet, M_3) \to 0$

точны. Остается применить лемму о змее. ☐

Эта теорема дает удобное средство для вычисления (ко)гомологий.

Определение 2.3. Точная последовательность G-модулей $\dots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$, в которой все G-модули P_n свободны, называется левой свободной резольвентой G-модуля M. Аналогично, точная последовательность G-модулей $0 \to M \to P^0 \to P^1 \to P^2 \to \dots$, в которой все G-модули P^n свободны, называется правой свободной резольвентой G-модуля M.

Теорема 2.4. (i) *Если* $0 \to M \to P^0 \xrightarrow{f^0} P^1 \xrightarrow{f^1} P^2 \xrightarrow{f^2} \dots$ *— свободная резольвента, то когомологии* G *с коэффициентами в* M *вычисляются применением функтора инвариантов:* $H^i(G, M) = H^i(P^{\bullet G}, f^{\bullet G})$.
(ii) *Если* $\dots \xrightarrow{f_3} P_2 \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \to M \to 0$ *— свободная резольвента, то гомологии* G *с коэффициентами в* M *вычисляются применением функтора коинвариантов:* $H_i(G, M) = H_i(P_{\bullet G}, f_{\bullet G})$.

Доказательство: (i) разрежем резольвенту на точные тройки

$$0 \to M \to P^0 \to M^1 \to 0, \quad 0 \to M^1 \to P^0 \to M^2 \to 0, \quad 0 \to M^2 \to P^0 \to M^3 \to 0, \quad \dots,$$

где $M^i = \mathrm{Im}\, f^{i-1} = \mathrm{Ker}\, f^i$. Применяя к первой из них предыдущую теорему и лемму 2.1 (iii), получаем

$$0 \to H^0(G, M) \to P^{0G} \to H^0(G, M^1) \to H^1(G, M) \to 0, \qquad H^{i+1}(G, M_1) = H^{i+2}(G, M) \quad \text{при } i \geqslant 0.$$

Применяя те же рассуждения ко второй тройке, и учитывая предыдущие равенства, получаем

$$0 \to H^0(G, M^1) \to P^{1G} \to H^0(G, M^2) \to H^2(G, M) \to 0, \qquad H^{i+1}(G, M_2) = H^{i+3}(G, M) \quad \text{при } i \geqslant 0.$$

Продолжая таким же образом, получаем

$$0 \to H^0(G, M^n) \to P^{nG} \to H^0(G, M^{n+1}) \to H^{n+1}(G, M) \to 0, \qquad H^{i+1}(G, M_{n+1}) = H^{i+n+2}(G, M) \quad \text{при } i \geqslant 0.$$

Так как морфизм $f^n : P^n \to P^{n+1}$ пропускается через M^{n+1}, то следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(G, M^{n-1}) \arrow[r] & P^{n-1\,G} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n-1\,G}"'] & H^0(G, M^n) \arrow[r] \arrow[dll, equal, dashed] & H^n(G, M) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^0(G, M^n) \arrow[r] & P^{nG} \arrow[r] \arrow[d, "f^{nG}"'] & H^0(G, M^{n+1}) \arrow[r] \arrow[dll, equal, dashed] & H^{n+1}(G, M) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^0(G, M^{n+1}) \arrow[r] & P^{n+1\,G} \arrow[r] & H^0(G, M^{n+2}) \arrow[r] & H^{n+2}(G, M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Значит, $\mathrm{Ker}\, f^{nG} = H^0(G, M^n)$, $\mathrm{Im}\, f^{n-1\,G} = \mathrm{Ker}(H^0(G, M^n) \to H^n(G, M))$, то есть $H^n(P^{\bullet G}, f^{\bullet G}) = H^n(G, M)$. Утверждение (ii) доказывается аналогично. ☐

В качестве примера использования резольвент для вычисления (ко)гомологий вычислим (ко)гомологии циклической группы. Пусть $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, а $t \in G$ — образующая группы G. Рассмотрим следующие элементы групповой алгебры: $1 - t \in \mathbb{Z}[G]$ и $N = 1 + t + \dots + t^{m-1} \in \mathbb{Z}[G]$.

Лемма 2.5. *Имеем* $\mathrm{Ker}(1 - t) = \mathbb{Z}N = \mathrm{Im}\, N$, $\mathrm{Ker}\, N = \mathrm{Im}(1 - t)$.

Доказательство: $(1 - t)(\sum a_k t^k) = \sum (a_k - a_{k-1}) t^k$, $N(\sum a_k t^k) = (\sum a_k) N$, далее очевидно. ☐

Следствие 2.6. *Тривиальный модуль* $\mathbb{Z}$ *имеет следующие резольвенты:*

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \dots \quad \text{и} \quad \dots \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 0.$$

Теперь заметим, что $\mathbb{Z}[G]_G = \mathbb{Z}[G]^G = \mathbb{Z}$, причем $t_G = t^G = 1$, а $N_G = N^G = m$. Следовательно, когомологии и гомологии группы G с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ вычисляются комплексами

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \dots \quad \text{и} \quad \dots \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0.$$

Окончательно, получаем

$$H^i(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{при } i = 0 \\ 0, & \text{при нечетном } i \\ \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, & \text{при четном } i \geqslant 2 \end{cases}, \qquad H_i(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{при } i = 0 \\ \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, & \text{при нечетном } i \\ 0, & \text{при четном } i \geqslant 2 \end{cases}$$

Часть 3. Расширения групп

Определение 3.1. Расширением группы G с помощью группы N называется точная последовательность (в категории групп) $1 \to N \to E \xrightarrow{f} G \to 1$. Расширение называется расщепимым, если существует гомоморфизм групп $\phi : G \to E$ (называемый расщеплением), такой что $f \circ \phi = \mathrm{Id}_G$.

Простейшим примером расширения групп является полупрямое произведение. Если $A : G \to \mathrm{Aut}(N)$ действие группы G на N, то группа $N \leftthreetimes G$ определяется как множество $N \times G$ с операцией $(n_1, g_1)(n_2, g_2) = (n_1 A(g_1)(n_2), g_1 g_2)$. Ясно, что отображения $n \mapsto (n, 1)$, $(n, g) \mapsto g$ задают на $N \leftthreetimes G$ структуру расширения. Можно показать, что всякое расщепимое расширение является полупрямым произведением.

Пусть группа E является произвольным расширением G с помощью N. Тогда $N \subset E$ нормальная подгруппа и $G \cong E/N$. Выберем какое-нибудь отображение множеств $\phi : G \to E$, такое что $f \circ \phi = \mathrm{Id}_G$. Иначе говоря, для каждого элемента $g \in G$ мы выбираем элемент $\phi(g) \in E$, такой что $f(\phi(g)) = g$. Так как $N \subset E$ нормальна, то $\mathrm{Ad}_{\phi(g)} N = N$, где $\mathrm{Ad}_g(x) = gxg^{-1}$ — сопряжение. Следовательно, $\mathrm{Ad}_{\phi(g)}$ является автоморфизмом группы N.

Лемма 3.2. *Класс автоморфизм $\mathrm{Ad}_{\phi(g)} \in \mathrm{Aut}\, N$ по модулю внутренних автоморфизмов группы N определен однозначно, т.е. не зависит от выбора ϕ.*

Доказательство: если $\phi' : G \to E$ — другое такое отображение, то $\phi'(g) = n\phi(g)$, где $n \in N$, следовательно $\mathrm{Ad}_{\phi'(g)} = \mathrm{Ad}_{n\phi(g)} = \mathrm{Ad}_n \circ \mathrm{Ad}_{\phi(g)}$, а $\mathrm{Ad}_n \in \mathrm{Inn}\, N$. $\square$

Таким образом, сопоставляя всякому элементу $g \in G$ автоморфизм $\mathrm{Ad}_{\phi(g)}$ с точностью до внутреннего автоморфизма получаем отображение $\overline{\mathrm{Ad}} : G \to \mathrm{Out}(N) = \mathrm{Aut}(N)/\mathrm{Inn}(N)$, не зависящее от выбора ϕ.

Лемма 3.3. *Отображение $\overline{\mathrm{Ad}} : G \to \mathrm{Out}(N)$ является гомоморфизмом групп.*

Доказательство: $f(\phi(g_1)\phi(g_2)) = f(\phi(g_1))f(\phi(g_2)) = g_1 g_2 = f(\phi(g_1 g_2))$, поэтому

$$\phi(g_1 g_2) = \xi(g_1, g_2)\phi(g_1)\phi(g_2), \qquad \text{где } \xi(g_1, g_2) \in N,$$

значит $\mathrm{Ad}_{\phi(g_1 g_2)} = \mathrm{Ad}_{\xi(g_1,g_2)\phi(g_1)\phi(g_2)} = \mathrm{Ad}_{\xi(g_1,g_2)} \circ \mathrm{Ad}_{\phi(g_1)} \circ \mathrm{Ad}_{\phi(g_2)}$, значит $\overline{\mathrm{Ad}}(g_1 g_2) = \overline{\mathrm{Ad}}(g_1)\overline{\mathrm{Ad}}(g_2)$. $\square$

Пусть группа N — абелева. Тогда $\mathrm{Inn}(N) = 1$, то есть $\mathrm{Out}(N) = \mathrm{Aut}(N)$ и гомоморфизм $\overline{\mathrm{Ad}}$ задает на N структуру G-модуля. Более того, $(\phi(g_1)\phi(g_2))\phi(g_3) = \xi(g_1, g_2)\phi(g_1 g_2)\phi(g_3) = \xi(g_1, g_2)\xi(g_1 g_2, g_3)\phi(g_1 g_2 g_3)$, $\phi(g_1)(\phi(g_2)\phi(g_3)) = \phi(g_1)\xi(g_2, g_3)\phi(g_2 g_3) = \overline{\mathrm{Ad}}_{g_1}\xi(g_2, g_3)\phi(g_1)\phi(g_2 g_3) = \overline{\mathrm{Ad}}_{g_1}\xi(g_2, g_3)\xi(g_1, g_2 g_3)\phi(g_1 g_2 g_3)$. Значит, $\xi(g_1, g_2)\xi(g_1 g_2, g_3) = \overline{\mathrm{Ad}}_{g_1}\xi(g_2, g_3)\xi(g_1, g_2 g_3)$, что при аддитивной записи становится условием 2-коцикла. Далее, если заменить отображение ϕ на ϕ', то $\phi'(g) = \eta(g)\phi(g)$, значит $\phi'(g_1)\phi'(g_2) = \eta(g_1)\phi(g_1)\eta(g_2)\phi(g_2) = \eta(g_1)\overline{\mathrm{Ad}}_{g_1}(\eta(g_2))\phi(g_1)\phi(g_2) = \eta(g_1)\overline{\mathrm{Ad}}_{g_1}(\eta(g_2))\xi(g_1, g_2)\phi(g_1 g_2) = \eta(g_1)\overline{\mathrm{Ad}}_{g_1}(\eta(g_2))\xi(g_1, g_2)\eta(g_1 g_2)^{-1}\phi'(g_1 g_2)$, значит $\xi'(g_1, g_2) = \eta(g_1)\overline{\mathrm{Ad}}_{g_1}(\eta(g_2))\xi(g_1, g_2)\eta(g_1 g_2)^{-1}$, что при аддитивной записи означает, что $\xi' - \xi = \partial^*\eta$. Отсюда заключаем, что каждому расширению группы G с помощью абелевой группы N можно сопоставить класс когомологий $\bar{\xi} \in H^2(G, N)$, который не зависит от выбора ϕ.

Обратно, если $\bar{\xi} \in H^2(G, N)$, то множество $E = N \times G$ с операцией $(n_1, g_1) \cdot (n_2, g_2) = (n_1 + g_1 n_2 + \xi(g_1, g_2), g_1 g_2)$ является искомой группой (проверьте, это не вполне тривиально!)

Теорема 3.4. *Множество расширений группы G с помощью абелевой группы N, индуцирующих данное действие группы G на N совпадает с группой $H^2(G, N)$.*

Замечание 3.5. Легко видеть, что нулевому классу когомологий соответсвует полупрямое произведение.