2 Курс, Алгебра 3
13.10.2003

Когомологии модулей

Часть 1. Свойства точности функтора Hom

Определение 1.1. Комплекс $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ называется точным слева, если он точен в членах M_1 и M_2, и точным справа, если он точен в членах M_2 и M_3.

Лемма 1.2. *(i) Последовательность* $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$ *точна слева* $\iff$ *для любого A-модуля N последовательность* $0 \to \mathrm{Hom}_A(N, M_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_A(N, M_2) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_A(N, M_3)$ *точна слева.*

(ii) Последовательность $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ *точна справа* $\iff$ *для любого A-модуля N последовательность* $0 \to \mathrm{Hom}_A(M_3, N) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_A(M_2, N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(M_1, N)$ *точна слева.*

Доказательство: (i) $(\Longrightarrow)$ Если $\phi_1 \in \mathrm{Hom}_A(N, M_1)$, $f_*(\phi_1) = f \circ \phi_1 = 0$, то $\mathrm{Im}\,\phi_1 \subset \mathrm{Ker}\, f = 0$, поэтому $\phi_1 = 0$. Если $\phi_2 \in \mathrm{Hom}_A(N, M_2)$, $g_*(\phi_2) = g \circ \phi_2 = 0$, то $\mathrm{Im}\,\phi_2 \subset \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, f \cong M_1$, поэтому найдется $\phi_1 \in \mathrm{Hom}_A(N, M_1)$, такой что $\phi_2 = f_*(\phi_1)$. $(\Longleftarrow)$ Возьмем $N = M_1$, $\phi_1 = 1$. Тогда $0 = (g_* \circ f_*)(\phi_1) = g_*(f_*(\phi_1)) = g \circ f \circ 1 = g \circ f$, поэтому $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$. Возьмем $N = \mathrm{Ker}\, f$ и естественное вложение $\phi_1 : N \to M_1$. Тогда $f_*(\phi_1) = f \circ \phi_1 = 0$, поэтому $\phi_1 = 0$, то есть $N = \mathrm{Ker}\, f = 0$. Наконец, возьмем $N = \mathrm{Ker}\, g$ и естественное вложение $\phi_2 : N \to M_2$. Тогда $g_*(\phi_2) = g \circ \phi_2 = 0$, поэтому $\phi_2 = f_*(\phi_1) = f \circ \phi_1$. Значит $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\,\phi_2 \subset \mathrm{Im}\, f$.

(ii) $(\Longrightarrow)$ Аналогично, если $\psi_3 \in \mathrm{Hom}_A(M_3, N)$, $g^*(\psi_3) = \psi_3 \circ g = 0$, то $\mathrm{Ker}\,\psi_3 \supset \mathrm{Im}\, g = M_3$, поэтому $\psi_3 = 0$. Если $\psi_2 \in \mathrm{Hom}_A(M_2, N)$, $f^*(\psi_2) = \psi_2 \circ f = 0$, то $\mathrm{Ker}\,\psi_2 \supset \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$, поэтому ψ_2 пропускается через $M_2/\mathrm{Ker}\, g = M_3$. Иначе говоря, найдется $\psi_3 \in \mathrm{Hom}_A(M_3, N)$, такой что $\psi_2 = g^*(\psi_3)$. $(\Longleftarrow)$ Возьмем $N = M_3$, $\psi_3 = 1$. Тогда $0 = (f^* \circ g^*)(\psi_3) = f^*(g^*(\psi_3)) = 1 \circ g \circ f = g \circ f$, поэтому $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$. Возьмем $N = M_3/\mathrm{Im}\, g$ и естественную проекцию $\psi_3 : M_3 \to N$. Тогда $g^*(\psi_3) = \psi_3 \circ g = 0$, поэтому $\psi_3 = 0$, то есть $N = 0$, то есть $\mathrm{Im}\, g = M_3$. Наконец, возьмем $N = M_2/\mathrm{Im}\, f$ и естественное вложение $\psi_2 : M_2 \to N$. Тогда $f^*(\psi_2) = \psi_2 \circ f = 0$, поэтому $\psi_2 = g^*(\psi_3) = \psi_3 \circ g$. Значит $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\,\psi_2 \supset \mathrm{Ker}\, g$. □

Лемма 1.3. *Если P — свободный модуль, а $f : M \to M'$ — эпиморфизм, то для всякого морфизма $\phi' : P \to M'$ найдется морфизм $\phi : P \to M$, такой что $\phi' = f \circ \phi$.*

Доказательство: всякий морфизм из P однозначно задается своими значениями на произвольном базисе $\{ e_i \}$ модуля P, поэтому достаточно выбрать прообразы элементов $\phi'(e_i)$ относительно f. □

Лемма 1.4. *Пусть последовательность* $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ *точна.*

(i) Если N свободен, то $0 \to \mathrm{Hom}_A(N, M_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_A(N, M_2) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_A(N, M_3) \to 0$ *точная тройка.*

(ii) Если M_3 свободен, то $0 \to \mathrm{Hom}_A(M_3, N) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_A(M_2, N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(M_1, N) \to 0$ *точная тройка.*

Доказательство: (i) Достаточно проверить сюръективность морфизма g_*, но она равносильна тому, что всякий морфизм из Nв M_3 можно поднять вдоль g.

(ii) Достаточно проверить сюръективность морфизма f^*. Поднимая тождественный морфизм $M_3 \to M_3$ вдоль g, получаем морфизм $s : M_3 \to M_2$, такой что $g \circ s = 1_{M_3}$. Ясно, что s — вложение. Докажем, что композиция $\bar{f} : M_1 \xrightarrow{f} M_2 \to M_2/s(M_3)$ — изоморфизм. Действительно, $\bar{f}(m_1) = 0 \Longrightarrow f(m_1) = s(m_3) \Longrightarrow m_3 = g(s(m_3)) = g(f(m_1)) = 0 \Longrightarrow m_1 \in \mathrm{Ker}\, f = 0$. Кроме того, если $m_2 \in M_2$, то $g(m_2 - s(g(m_2))) = g(m_2) - g(s(g(m_2))) = g(m_2) - g(m_2) = 0$, поэтому $m_2 - s(g(m_2)) = f(m_1)$ и $m_2 = f(m_1) + s(g(m_2))$. Следовательно, $\bar{f}$ — эпиморфизм. Обозначим через p композицию $M_2 \to M_2/s(M_3) \xrightarrow{\bar{f}^{-1}} M_1$. Тогда $p \circ f = 1_{M_1}$ и для всякого морфизма $\psi : M_1 \to N$ имеем $\psi = \psi \circ p \circ f = f^*(\psi \circ p)$, поэтому f^* сюръективен. □

Замечание 1.5. Фактически, мы доказали, всякая точная тройка со свободным M_3 расщепляется, то есть изоморфна тройке $0 \to M_1 \xrightarrow{(1,0)} M_1 \oplus M_3 \xrightarrow{(0,1)} M_3 \to 0$.

Определение 1.6. Функтор называется точным слева (точным справа, точным), если он переводит всякую точную последовательность в последовательность точную слева (точную справа, точную).

Следствие 1.7. *Функтор* Hom *точен слева как по первому, так и по второму аргументу.*

Часть 2. Функторы Ext

Определение 2.1. Пусть $\dots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ — левая свободная резольвента, то есть точная последовательность A-модулей, в которой все модули P^i свободные. Определим группы расширений

$$\mathrm{Ext}^p_A(M,N) := H^p(\mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N))$$

как когомологии комплекса $0 \to \mathrm{Hom}_A(P_0,N) \to \mathrm{Hom}_A(P_1,N) \to \mathrm{Hom}_A(P_2,N) \to \dots$.

Лемма 2.2. *Всякий модуль над кольцом имеет свободную резольвенту.*

Доказательство: если $\{ m_i \}_{i \in I}$ — набор (возможно бесконечный) образующих A-модуля M, то гомоморфизм $\oplus_{i\in I} A \to M$ сюръективен. Иначе говоря, у всякого A-модуля есть "свободная накрывающая". Пользуясь этим фактом строим резольвенту последовательно: в качестве P_0 берем свободную накрывающую M, в качестве P_1 берем свободную накрывающую A-модуля $\mathrm{Ker}(P_0 \to M)$, в качестве P_2 берем свободную накрывающую A-модуля $\mathrm{Ker}(P_1 \to P_0)$ и т.д. $\square$

Возникает вопрос, зависит ли группа $\mathrm{Ext}^p_A(M,N)$ от выбора резольвенты.

Лемма 2.3. *Если $P_\bullet \to M$ и $P'_\bullet \to M'$ — свободные резольвенты, а $f : M \to M'$ — гомоморфизм, то существует морфизм комплексов $f_\bullet : P_\bullet \to P'_\bullet$, коммутирующий с f. Более того, если $f'_\bullet : P_\bullet \to P'_\bullet$ — другой такой морфизм комплексов, то морфизмы $f'_\bullet$ и $f_\bullet$ гомотопны, то есть существует последовательность морфизмов $h_i : P_i \to P'_{i+1}$, так что $f'_i - f_i = h_{i-1}d_i + d_{i+1}h_i$.*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, dashed, "f_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed, "f_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, dashed, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P'_2 \arrow[r, "d'_2"'] & P'_1 \arrow[r, "d'_1"'] & P'_0 \arrow[r, "d'_0"'] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, bend right, "f'_2"'] \arrow[d, bend left, "f_2"] \arrow[dl, dashed] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, bend right, "f'_1"'] \arrow[d, bend left, "f_1"] \arrow[dl, dashed] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, bend right, "f'_0"'] \arrow[d, bend left, "f_0"] \arrow[dl, dashed] & M \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P'_2 \arrow[r, "d'_2"'] & P'_1 \arrow[r, "d'_1"'] & P'_0 \arrow[r, "d'_0"'] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Доказательство: морфизмы f_i будем строить последовательно, положив $f_{-1} = f$. Если f_i уже построен, то заметим, что $d'_i f_i d_{i+1} = f_{i-1} d_i d_{i+1} = 0$, поэтому $\mathrm{Im}(d_{i+1} f_i) \subset \mathrm{Ker}\, d'_i = \mathrm{Im}\, d'_{i+1}$, следовательно найдется f_{i+1}, такой что $d'_{i+1} f_{i+1} = f_i d_{i+1}$. Морфизмы h_i будем строить последовательно, положив $h_{-1} = 0$. Если h_{i-1} уже построен, то заметим, что $d'_i(f'_i - f_i - h_{i-1}d_i) = d'_i f'_i - d'_i f_i - d'_i h_{i-1} d_i = f'_{i-1} d_i - f_{i-1} d_i - d'_i h_{i-1} d_i = (f'_{i-1} - f_{i-1} - d'_i h_{i-1}) d_i = h_{i-2} d_{i-1} d_i = 0$, поэтому $\mathrm{Im}(f'_i - f_i - h_{i-1} d_i) \subset \mathrm{Ker}\, d'_i = \mathrm{Im}\, d'_{i+1}$, следовательно найдется h_i, такой что $d'_{i+1} h_i = f'_i - f_i - h_{i-1} d_i$. $\square$

Следствие 2.4. *Группы $\mathrm{Ext}^p_A(M,N)$ определены однозначно с точностью до канонического изоморфизма.*

Доказательство: пусть $P^\bullet \to M$ и $P'_\bullet \to M$ — свободные резольвенты. Тождественный морфизм 1_M можно продолжить до морфизма резольвент $f_\bullet : P_\bullet \to P'_\bullet$, который индуцирует морфизм комплексов $f^*_\bullet : \mathrm{Hom}_A(P'_\bullet, N) \to \mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N)$ и их когомологий $H^p f^*_\bullet : \mathrm{Ext}^p_A(M,N) \to \mathrm{Ext}^p_A(M,N)$. При этом, если $f'_\bullet$ — другой морфизм резольвент, то гомотопия $h_\bullet$, соединяющая $f_\bullet$ и $f'_\bullet$ индуцирует гомотопию, соединяющую $f^*_\bullet$ и ${f'_\bullet}^*$, следовательно $H^p f^*_\bullet = H^p {f'_\bullet}^*$. Таким образом, мы получаем канонический морфизм. Чтобы проверить, что он является изоморфизмом, рассмотрим морфизм резольвент $g_\bullet : P'_\bullet \to P_\bullet$, продолжающий 1_M. Тогда $H^p f^*_\bullet \circ H^p g^*_\bullet = H^p(f^*_\bullet \circ g^*_\bullet) = H^p((g_\bullet \circ f_\bullet)^*)$, но морфизм резольвент $g_\bullet \circ f_\bullet : P_\bullet \to P_\bullet$ продолжает морфизм 1_M, также как и $1_{P_\bullet}$, поэтому $H^p((g_\bullet \circ f_\bullet)^*) = H^p(1^*_{P_\bullet}) = \mathrm{Id}$. Таким образом, $H^p f^*_\bullet \circ H^p g^*_\bullet = \mathrm{Id}$. Аналогично доказывается $H^p g^*_\bullet \circ H^p f^*_\bullet = \mathrm{Id}$. $\square$

Следствие 2.5. Ext^p_A *является функтором как по первому, так и по второму аргументам.*

Лемма 2.6. (i) *Функторы* Ext^p_A *коммутируют с прямыми суммами;* (ii) $\mathrm{Ext}^0(M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,N)$*;* (iii) *если M свободен, то $\mathrm{Ext}^p(M,N) = 0$ при $p > 0$ для всех N.*

Доказательство: (i) Если $P_\bullet \to M$ и $P'_\bullet \to M'$ — свободные резольвенты, то $P_\bullet \oplus P'_\bullet \to M \oplus M'$ — свободная резольвента, значит $\mathrm{Ext}^p_A(M \oplus M', N) = H^p(\mathrm{Hom}_A(P_\bullet \oplus P'_\bullet, N)) = H^p(\mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N) \oplus \mathrm{Hom}_A(P'_\bullet, N)) = H^p(\mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N)) \oplus (\mathrm{Hom}_A(P'_\bullet, N)) = \mathrm{Ext}^p_A(M,N) \oplus \mathrm{Ext}^p_A(M',N)$. (ii) Применяя к точной последовательности $P_1 \to P_0 \to M \to 0$ точный слева функтор $\mathrm{Hom}_A(-,N)$, получаем точную слева последовательность $0 \to \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(P_0,N) \to \mathrm{Hom}_A(P_1,N)$, откуда $\mathrm{Ext}^0_A(M,N) = H^0(\mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N)) = \mathrm{Hom}_A(M,N)$. (iii) Если M свободен, то полагая $P_0 = M$, $P_{>0} = 0$ получаем свободную резольвенту, и в комплексе $\mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N)$ все члены, начиная с первого зануляются, значит $\mathrm{Ext}^p_A(M,N) = 0$ при $p > 0$. $\square$

Легко видеть, что когомологии групп являются частным случаем функтора Ext. А именно, стандартная резольвента является свободной резольвентой тривиального G-модуля $\mathbb{Z}$ в категории $\mathbb{Z}[G]$-модулей. Поэтому,

$$H^p(G, M) = \mathrm{Ext}^p_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M).$$

Теорема 2.7. *Всякой точной тройке $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ соответствуют функториальные точные последовательности*

$$0 \to \mathrm{Hom}(M'', N) \to \mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(M', N) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1(M'', N) \to \mathrm{Ext}^1(M, N) \to \mathrm{Ext}^1(M', N) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^2(M'', N) \to \dots$$
$$0 \to \mathrm{Hom}(N, M') \to \mathrm{Hom}(N, M) \to \mathrm{Hom}(N, M'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1(N, M') \to \mathrm{Ext}^1(N, M) \to \mathrm{Ext}^1(N, M'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^2(N, M') \to \dots$$

Доказательство: можно выбрать свободные резольвенты $P'_\bullet \to M'$, $P''_\bullet \to M''$ и $P_\bullet \to M$, а также морфизмы резольвент $f_\bullet : P'_\bullet \to P_\bullet$ и $g_\bullet : P_\bullet \to P''_\bullet$ таким образом, что последовательность $0 \to P'_\bullet \to P_\bullet \to P''_\bullet \to 0$ будет точна. Применяя функтор $\mathrm{Hom}_A(-, N)$ получим точную последовательность $0 \to \mathrm{Hom}_A(P''_\bullet, N) \to \mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N) \to \mathrm{Hom}_A(P'_\bullet, N) \to 0$ так как $P''_\bullet$ свободен. Теперь первая точная последовательность групп Ext получается применением леммы о змее.

Вторая последовательность групп Ext строится так же как и точная последовательность когомологий группы. Выбираем свободную резольвенту $Q_\bullet \to N$, применяем функтор $\mathrm{Hom}_A(Q_\bullet, -)$, получаем точную последовательность комплексов $0 \to \mathrm{Hom}_A(Q_\bullet, M') \to \mathrm{Hom}_A(Q_\bullet, M) \to \mathrm{Hom}_A(Q_\bullet, M'') \to 0$ и пользуемся леммой о змее. □

Часть 3. Расширения

Определение 3.1. Расширением A-модуля M с помощью A-модуля N называется точная тройка A-модулей вида $0 \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} M \to 0$. Расширения (E, i, π) и (E', i', π') называются эквивалентными, если существует изоморфизм $\phi : E \to E'$, такой что $i' = \phi \circ i$, $\pi = \pi' \circ \phi$. Расширение называется тривиальным, если оно эквивалентно расширению $0 \to N \xrightarrow{(1,0)} N \oplus M \xrightarrow{(0,1)} M \to 0$.

Теорема 3.2. *Расширения A-модуля M с помощью N нумеруются элементами группы $\mathrm{Ext}^1_A(M, N)$.*

Доказательство: пусть $0 \to N \to E \to M \to 0$ — расширение. Применяя функтор $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ получаем точную последовательность $0 \to \mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(M, E) \to \mathrm{Hom}(M, M) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1(M, N) \to \dots$. Сопоставим расширению элемент $\delta(1_M) \in \mathrm{Ext}^1(M, N)$. Из функториальности следует, что эквивалентным расширениям соответствуеют одинаковые элементы в группе $\mathrm{Ext}^1(M, N)$. Обратно, всякому элементу $\varepsilon \in \mathrm{Ext}^1(M, N)$ сопоставим расширение таким образом. Выберем свободную резольвенту $\dots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ и морфизм $f : P_1 \to N$, представляющий ε. Тогда $d_1^* f = f \circ d_2 = 0$. Рассмотрим отображение $\phi : P_1 \to N \oplus P_0$, $p_1 \mapsto (fp_1, d_1 p_1)$, и определим $E = \mathrm{Coker}\,\phi := (N \oplus P_0)/\mathrm{Im}\,\phi$. Пусть, наконец $i : N \to E$ формулой $i(n) = (n, 0) \pmod{\mathrm{Im}\,\phi}$, и $\pi : E \to M$ формулой $\pi(n, p_0) = d_0 p_0$ (если $(n, p_0) \in \mathrm{Im}\,\phi$, то $(n, p_0) = (fp_1, d_1 p_1)$ и $d_0 p_0 = d_0 d_1 p_1 = 0$). Докажем, что $0 \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} M \to 0$ — точная последовательность. Действительно, $\pi(i(n)) = \pi(n, 0) = d_0 0 = 0$, значит $\mathrm{Im}\, i \subset \mathrm{Ker}\,\pi$. Кроме того, если $i(n) = 0$, то $(n, 0) = (fp_1, d_1 p_1)$, в частности $d_1 p_1 = 0$, то есть $p_1 = d_2 p_2$, и $n = fp_1 = fd_2 p_2 = 0$. Значит i — вложение. Далее, π — сюръекция, так как $d_0 : P_0 \to M$ — сюръекция. Наконец, если $\pi(n, p_0) = 0$, то $d_0 p_0 = 0$, значит $p_0 = d_1 p_1$, следовательно $(n, p_0) = (n - fp_1, 0) + (fp_1, d_1 p_1) = i(n - fp_1) \pmod{\mathrm{Im}\,\phi}$, то есть $\mathrm{Ker}\,\pi = \mathrm{Im}\, i$.

Часть 4. Тензорное произведение

Лемма 4.1. *Последовательность $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ точна справа $\iff$ для любого A-модуля N последовательность $M_1 \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes 1} M_2 \otimes_A N \xrightarrow{g \otimes 1} M_3 \otimes_A N \to 0$ точна справа.*

Доказательство: согласно предыдущей лемме последовательнсоть $M_\bullet \otimes_A N$ точна справа $\iff \forall P$ последовательность $\mathrm{Hom}_A(M_\bullet \otimes_A N, P) \cong \mathrm{Hom}_A(M_\bullet, \mathrm{Hom}_A(N, P))$ точна слева $\iff$ последовательнсоть $M_\bullet$ точна сплева, так как всякий A-модуль можно представить в виде $\mathrm{Hom}_A(N, P)$ (так как $\mathrm{Hom}_A(A, P) \cong P$). □

Эта лемма дает простой способ вычисления тензорного произведения модулей. Представим модуль M как коядро отображения свободных модулей: $A^m \xrightarrow{f} A^n \to M \to 0$, где $f = (f_{ij})$ — матрица с коэффициентами в A. Тогда имеем точную последовательность $N^{\oplus m} \xrightarrow{f} N^{\oplus n} \to M \otimes_A N \to 0$.

Следствие 4.2. *Имеем $A/\mathfrak{a} \otimes_A M \cong M/\mathfrak{a}M$.*