# Расширения колец и полей

## Часть 1. Целые расширения колец

Пусть $A \subset B$ — вложение (расширение) колец. Для вского $x \in B$ будем обозначать через $A[x]$ подкольцо в $B$, порожденное над $A$ элементом $x$, то есть образ кольца $A[X]$ при гомоморфизме $A[X] \to B$, $X \mapsto x$.

**Определение 1.1.** Элемент $x \in B$ называется целым над $A$, если он является корнем многочлена с коэффициентами в $A$ и старшим коэффициентом 1, то есть $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$.

**Лемма 1.2.** *Следующие условия равносильны:*
*(i) элемент $x \in B$ цел над $A$;*
*(ii) подкольцо $A[x] \subset B$ является конечно порожденным $A$-модулем;*
*(iii) $x$ содержится в подкольце $C \subset B$, являющемся конечно порожденным $A$-модулем.*

Доказательство: $(i) \Longrightarrow (ii)$ элементы $1, \ldots, x^{n-1}$ порождают $A[x]$ над $A$. $(ii) \Longrightarrow (iii)$ Возьмем $C = A[x]$. $(iii) \Longrightarrow (i)$ Пусть элементы $e_1, \ldots, e_n \in C$ порождают $C$ как $A$-модуль, причем будем считать, что $e_1 = 1$. Тогда $xe_i = \sum a_{ij} e_j$, поэтому матрица $(x\delta_{ij} - a_{ij})$ действует нулем на каждый из элементов $e_i$. Следовательно, многочлен $f(x) = \det(x\delta_{ij} - a_{ij}) = (\widehat{x\delta_{ij} - a_{ij}})(x\delta_{ij} - a_{ij})$ действует нулем на каждый из $e_i$. В частности, $f(x) = f(x) \cdot 1 = f(x) e_1 = 0$. Остатется заметить, что $f(x)$ имеет коэффициенты в $A$, а его старший коэффициент равен 1. □

**Лемма 1.3.** *Сумма и произведение целых элементов цело.*

Доказательство: если $x$ и $y$ целы над $A$, то $A[x, y]$ является конечно порожденным $A$-модулем (мономы $x^i y^j$, $i \leqslant m$, $j \leqslant n$ порождают $A[x, y]$ над $A$). Кроме того, $A[x, y]$— подкольцо, содержащее как $x + y$, так и $xy$. □

**Следствие 1.4.** *Если $A \subset B$ — расширение колец, то множество элементов кольца $B$, целых над $A$ является подкольцом в $B$.*

Подкольцо элементов кольца $B$, целых над $A$ называется целым замыканием $A$ в $B$. Если целое замыкание $A$ в $B$ совпадает с $B$, то говорят, что $B$ цело над $A$ (является целым расширением кольца $A$).

**Лемма 1.5.** *Если $A \subset B \subset C$ — расширения колец, $B$ цело над $A$, и $x \in C$ цел над $B$, то $x$ цел над $A$.*

Доказательство: пусть $x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n = 0$, $b_i \in B$. Тогда $A[x, b_1, \ldots, b_n]$ является конечно порожденным $A[b_1, \ldots, b_n]$-модулем, но $A[b_1, \ldots, b_n]$ является конечно порожденным $A$-модулем (так как $b_i$ целы над $A$). Значит $A[x, b_1, \ldots, b_n]$ является конечно порожденным $A$-модулем, следовательно $x$ цел над $A$. □

**Следствие 1.6.** *Если $A \subset B \subset C$ — расширения колец, и $B$ цело над $A$, то целое замыкание $A$ в $C$ совпадает с целым замыканием $B$ в $C$.*

Если целое замыкание $A$ в $B$ совпадает с $A$, то говорят, что $A$ целозамкнуто в $B$. Целостное кольцо $A$ называется целозамкнутым, если оно целозамкнуто в своем поле частных $F(A)$.

**Лемма 1.7.** *Целое замыкание $A$ в $B$ целозамкнуто в $B$.*

Доказательство: если $x \in B$ цел над целым замыканием $\bar{A}$ кольца $A$ в $B$, то $x$ цел над $A$, то есть $x \in \bar{A}$. □

**Следствие 1.8.** *Целое замыкание целостного кольца $A$ в поле его частных целозамкнуто.*

**Лемма 1.9.** *Если $A \subset B$— целое расширение целостных колец, то расширение полей $F(A) \subset F(B)$ — алгебраическое.*

Доказательство: если $x \in B$, то $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, то $x$ алгебраичен над $F(A)$. Кроме того, если $y \in B$, то $y^m + a'_1 y^{m-1} + \cdots + a'_m = 0$, поэтому $a'_m y^{-m} + \cdots + a'_1 y^{-1} + 1 = 0$, значит $y^{-1}$ алгебраичен над $F(A)$. Значит $x/y$ алгебраичен над $F(A)$, то есть $F(A) \subset F(B)$ алгебраическое расширение. □

## Часть 2. Конечные морфизмы

**Лемма 2.1.** *Если $A \subset B$ — целое расширение целостных колец, то $A$ — поле $\iff$ $B$ — поле.*

Доказательство: если $A$ — поле, $x \in B$ и $X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n$ — многочлен минимальной степени со старшим коэфициентом 1, корнем которого является $x$, то $a_n \neq 0$, значит $-a_n^{-1}(x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-1})x = 1$, значит $x$ — обратим. Если же $B$ — поле, и $x \in A$, то $x^{-1} \in B$, значит $x^{-n} + a_1 x^{1-n} + \dots + a_n = 0$ для некоторых $a_1, \dots, a_n \in A$, значит $x^{-1} = -a_1 - \dots - a_n x^{n-1} \in A$. $\square$

Гомоморфизм колец $f : A \to B$ называется целым, если кольцо $B$ цело над $f(A)$.

**Лемма 2.2.** *Если $f : A \to B$ — целый морфизм, $\mathfrak{b} \subset B$ — идеал, и $\mathfrak{a} = f^{-1}(\mathfrak{b})$, то $A/\mathfrak{a} \subset B/\mathfrak{b}$ — целое расширение.*

Доказательство: поднимем элемент $\bar{x} \in B/\mathfrak{b}$ до элемента $x \in B$ и найдем элементы $a_i \in A$, такие что $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$. Тогда $\bar{x}^n + \bar{a_1}\bar{x}^{n-1} + \dots + \bar{a_n} = 0$. $\square$

**Следствие 2.3.** *Если $f : A \to B$ — целый морфизм, то $\mathfrak{b} \subset B$ максимален $\iff$ $f^{-1}(\mathfrak{b}) \subset A$ максимален.*

**Лемма 2.4.** *Если $f : A \to B$ — целый морфизм, $\mathfrak{a} \subset A$ — идеал, и $\mathfrak{b} = Bf(\mathfrak{a}) \subset B$, то $A/\mathfrak{a} \to B/\mathfrak{b}$ — целое расширение.*

Доказательство: $B/\mathfrak{b}$ цело над $A/f^{-1}(\mathfrak{b})$, а $A/f^{-1}(\mathfrak{b})$ цело над $A/\mathfrak{a}$, так как $\mathfrak{a} \subset f^{-1}(f(\mathfrak{a})) \subset f^{-1}(Bf(\mathfrak{a})) = f^{-1}(\mathfrak{b})$. Значит $B/\mathfrak{b}$ цело над $A/\mathfrak{a}$. $\square$

**Лемма 2.5.** *Если кольцо $A$ является целым расширением поля $\mathsf{k}$ и конечно порождено над $\mathsf{k}$, то $A$ имеет лищь конечное число максимальных идеалов.*

Доказательство: пусть $x_1, \dots, x_n$ порождают $A$ над $\mathsf{k}$, и $X \subset \mathbb{A}^n$ — соответствующее алгебраическое многообразие. Так как каждое из $x_i$ является корнем многочлена с коэффициентами в $\mathsf{k}$, то каждая координата точки из $X$ может принимать лишь конечное число значений (корней соответствующего многочлена). Поэтому число точек в $X$ конечно, а значит, по теореме Гильберта о нулях, конечно и количество максимальных идеалов в $A$. $\square$

**Теорема 2.6.** *Пусть $X$, $Y$ — аффинные алгебраические многообразия, $f : X \to Y$ — морфизм, такой что морфизм колец $f^* : A_Y \to A_X$ целый. Тогда каждая точка многообразия $Y$ имеет конечное число прообразов в $X$.*

Доказательство: если $f(x) = y$, то $f^*(\mathfrak{m}_y) \subset \mathfrak{m}_x$, поэтому достаточно проверить, что существует лишь конечное число максимальных идеалов в $A_X$, содержащих $f^*(\mathfrak{m}_y)$. Однако, ясно что эти идеалы находятся в биекции с максимальными идеалами кольца $A_X/A_X f^*(\mathfrak{m}_y)$, которое является конечно порожденным целым расширением поля $A_Y/\mathfrak{m}_y$. $\square$

Морфизмы алгебраических многообразий, соответствующие целым морфизмам колец, называются конечными морфизмами.

## Часть 3. Трансцендентные расширения полей

Пусть $K/\mathsf{k}$ — расширение полей. Набор элементов $\{ x_i \}_{i \in I}$ называется алгебраически независимым над $\mathsf{k}$, если не существует нетривиального многочлена с коэффициентами в $\mathsf{k}$, обращающегося в нуль при подстановке в него $x_i$. Иначе говоря, если гомоморфизм $\mathsf{k}[X_i]_{i \in I} \to K$, $X_i \mapsto x_i$ инъективен.

**Лемма 3.1.** *Если набор элементов $\{ x_i \}_{i \in I}$* алгебраически независимым над $\mathsf{k}$, *то гомоморфизм $\mathsf{k}[X_i]_{i \in I} \to K$, $X_i \mapsto x_i$ продолжается до вложения полей $\mathsf{k}(X_i)_{i \in I} \to K$.*

Доказательство: поле $\mathsf{k}(X_i)_{i \in I}$ является полем частных кольца $\mathsf{k}[X_i]_{i \in I}$, поэтому вложение $\mathsf{k}[X_i]_{i \in I} \to K$ продолжается до вложения полей $\mathsf{k}(X_i)_{i \in I} \to K$. $\square$

**Определение 3.2.** Набор элементов $\{ x_i \}_{i \in I}$ порождает поле $K$ над $\mathsf{k}$, если всякий элемент из $\mathsf{k}$ можно представить в виде рациональной функции от $x_i$ с коэффициентами в $\mathsf{k}$. Расширение полей $K/\mathsf{k}$ называется конечно порожденным, если найдется конечное множество элементов $x_1, \dots, x_n \in K$, порождающих $K$ над $\mathsf{k}$.

**Лемма 3.3.** *Если $K/\mathsf{k}$ расширение полей, то в любой системе образующих $K$ над $\mathsf{k}$ найдется набор алгебраически независимых элементов $\{ x_i \}_{i \in I}$, такой что расширение $K/\mathsf{k}(x_i)_{i \in I}$ является алгебраическим.*

Доказательство: возьмем произвольный набор образующих $\{ x_j \}_{j \in J}$ и выберем в нем максимальный алгебраически независимый поднабор $\{ x_i \}_{i \in I}$ $(I \subset J)$ (для доказательства его существования надо воспользоваться леммой Цорна). Тогда любая из образующих $x_j$ поля $K$ над $\mathsf{k}$ алгебраична над $\mathsf{k}(x_i)_{i \in I}$. Кроме того, любой элемент поля $K$ лежит в подполе, порожденным конечным количеством элементов $x_j$ над $\mathsf{k}(x_i)_{i \in I}$. Следовательно, все элементы поля $K$ алгебраичны над $\mathsf{k}(x_i)_{i \in I}$. □

Набор алгебраически независимых над $\mathsf{k}$ элементов $\{ x_i \}_{i \in I}$, поля $K$ такой что расширение $K/\mathsf{k}(x_i)_{i \in I}$ алгебраическое, называется базисом трансцендентности $K$ над $\mathsf{k}$.

**Следствие 3.4.** *Если $K$ конечно порождено над $\mathsf{k}$, то $K$ обладает конечным базисом трансцендентности.*

**Теорема 3.5.** *Любые два базиса транцендентности равномощны.*

Доказательство: докажем утверждение в случае, когда один из базисов конечен. Пусть $\{ x_1, \dots, x_m \}$ — базис трансцендентности. Достаточно проверить, что если набор $\{ y_1, \dots, y_n \}$ алгебраически независим, то $n \leqslant m$. Действительно, $y_1$ алгебраичен над $\mathsf{k}(x_1, \dots, x_m)$, поэтому найдется многочлен $f_1$, такой что $f_1(y_1, x_1, \dots, x_m) = 0$. Ясно, что хотя бы один из элементов $x_i$ входит в $f$ (иначе $y_1$ был бы алгебраичен над $\mathsf{k}$, что протеворечит алгебраической независимости набора $\{ y_1, \dots, y_n \}$). Перенумеровав $x_i$ можно считать, что это $x_1$. Следовательно, $x_1$ алгебраичен над $\mathsf{k}(y_1, x_2, \dots, x_m)$, а значит $K$ алгебраично над $\mathsf{k}(y_1, x_2, \dots, x_m)$. Далее, $y_2$ алгебраичен над $\mathsf{k}(y_1, x_2, \dots, x_m)$, поэтому найдется многочлен $f_2$, такой что $f_2(y_1, y_2, x_2, \dots, x_m) = 0$. Ясно, что хотя бы один из элементов $x_i$ входит в $f$ (иначе $y_1$ и $y_2$ были бы алгебраически зависимы). Перенумеровав $x_i$ можно считать, что это $x_2$. Следовательно, $x_2$ алгебраичен над $\mathsf{k}(y_1, y_2, x_3, \dots, x_m)$, а значит $K$ алгебраично над $\mathsf{k}(y_1, y_2, x_3, \dots, x_m)$. Если $n > m$ то подобными рассуждениями доказываем, что $K$ алгебраично над $\mathsf{k}(y_1, \dots, y_m)$, что противоречит алгебраической независимости набора $\{ y_1, \dots, y_n \}$. □

Мощность базиса трансцендентности $K$ над $\mathsf{k}$ называется его степенью трансцендентности над $k$ и обозначается $\operatorname{degtr} K/\mathsf{k}$.

## Часть 4. Лемма Нетер о нормализации

**Теорема 4.1.** *Если $A$ — конечно порожденная $\mathsf{k}$-алгебра, то существует конечное число алгебраически независимых над $\mathsf{k}$ элементов $y_1, \dots, y_r \in A$, таких что $A$ цело над $\mathsf{k}[y_1, \dots, y_r]$.*

Доказательство: докажем утверждение для бесконечного поля $\mathsf{k}$. Выберем конечный набор образующих $x_1, \dots, x_n$ алгебры $A$ над $\mathsf{k}$ и докажем утверждение индукцией по $n$. Если $x_1, \dots, x_n$ алгебраически независимы, то доказывать нечего. Иначе, пусть $f(x_1, \dots, x_n) = 0$. Пусть $F(x_1, \dots, x_n)$ — однородная компонента старшей степени и пусть $F(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0$. Перенумеровав переменные, можно считать, что $\lambda_n \neq 0$. Пусть $x_i' = x_i - \lambda_i/\lambda_n x_n$. Тогда $f(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n) + \dots = F(x_1' + \lambda_1/\lambda_n x_n, \dots, x_{n-1}' + \lambda_{n-1}/\lambda_n x_n, x_n) + \dots = F(\lambda_1/\lambda_n, \dots, \lambda_{n-1}/\lambda_n, 1) x_n^N + \dots = F(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \lambda_n^{-N} x_n^N + \dots$, поэтому $x_n$ цел над $\mathsf{k}[x_1', \dots, x_{n-1}']$, то есть $A$ цело над $\mathsf{k}[x_1', \dots, x_{n-1}']$. По предположению индукции найдется алгебраически независимый набор $y_1, \dots, y_r \in \mathsf{k}[x_1', \dots, x_{n-1}']$, такой что $\mathsf{k}[x_1', \dots, x_{n-1}']$ цело над $\mathsf{k}[y_1, \dots, y_r]$. Но тогда и $A$ цело над $\mathsf{k}[y_1, \dots, y_r]$. □

**Замечание 4.2.** Геометрический смысл доказательства таков: мы рассматриваем соответствующее алгебре $A$ многообразие $X \subset \mathbb{A}^n$, выбираем гиперповерхность $f(x) = 0$, содержащую $X$, и рассматриваем проекцию из точки, не лежащей на этой гиепрповерхности.

**Лемма 4.3.** *Если $A$ — целостное кольцо, элементы $y_1, \dots, y_r \in A$ алгебраически независимы над $\mathsf{k}$ и $A$ цело над $\mathsf{k}[y_1, \dots, y_r]$, то $\operatorname{degtr} F(A)/k = r$.*

Доказательство: $F(A)$ алгебраично над $\mathsf{k}(y_1, \dots, y_r)$, а $\operatorname{degtr} \mathsf{k}(y_1, \dots, y_r)/\mathsf{k} = r$, так как $y_1, \dots, y_r$ образуют базис трансцендентности. □

Таким образом, степень трансцендентности поля частных кольца функций на неприводимом алгебраическом многообразии является алгебраическим способом определить размерность многообразия: $\dim X = \operatorname{degtr} A_X$.