Полупростые алгебры

Часть 1. Полупростые модули

Пусть A — алгебра, не обязательно коммутативная. В дальнейшем мы рассматриваем левые A-модули и левые идеалы (если не оговорено иное), хотя аналогичные рассуждения легко переносятся на случай правых A-модулей и правых идеалов.

Определение 1.1. A-модуль M называется простым, если он не содержит подмодулей, кроме 0 и M.

Примеры 1.2.
1. Если A — тело, то модуль M прост $\Longleftrightarrow \dim_A M = 1$;
2. если $A = \mathrm{End}_{\mathsf{k}}(V)$, то V — простой A-модуль;
3. если $A = \mathsf{k}[G]$ — групповая алгебра, а M — представление, то M — прост $\Longleftrightarrow M$ — неприводимо.

Лемма 1.3. *Если $f : M \to N$ — гомоморфизм простых A-модулей, то либо $f = 0$, либо f — изоморфизм.*

Доказательство: ядро и образ f — подмодули в M и N, поэтому если $f \neq 0$, то $\mathrm{Ker}\, f = 0$, $\mathrm{Im}\, f = N$, то есть f — изоморфизм. □

Следствие 1.4. *Если M — простой A-модуль, то $\mathrm{End}_A(M)$ — тело.*

Определение 1.5. A-модуль M называется полупростым, если для всякого подмодуля $M' \subset M$ найдется подмодуль $M'' \subset M$, такой что $M = M' \oplus M''$.

Примеры 1.6.
1. Если A — тело, то любой A-модуль полупрост;
2. если $A = \mathrm{End}_{\mathsf{k}}(V)$, то V — простой A-модуль;
3. если G конечная группа и $\mathrm{char}\,\mathsf{k} = 0$ (то есть G редуктивна), то любой $\mathsf{k}[G]$-модуль полупрост.

Лемма 1.7. *Прямая сумма простых модулей полупроста.*

Доказательство: пусть $M = \oplus_{i\in I} M_i$, M_i — простые, и $M' \subset M$. Пусть $I_0 \subset I$ — максимальное подмножество, такое что $(\oplus_{i\in I_0} M_i) \cap M' = 0$ (для доказательства его существования придется воспользоваться леммой Цорна). Положим $M'' = \oplus_{i\in I_0} M_i$ и покажем, что $M = M' \oplus M''$. Действительно, $M' \cap M'' = 0$ по определению. С другой стороны, $M_i \cap (M' \oplus M'')$ — подмодуль в M_i. Если он равен нулю, то $(M'' \oplus M_i) \cap M' = 0$, значит I_0 не максимально. Значит он равен M_i, значит $M_i \subset M' \oplus M''$, значит $M = \oplus_{i\in I} M_i \subset M' \oplus M''$, то есть $M' \oplus M'' = M$. □

Лемма 1.8. *Подмодуль и фактормодуль полупростого модуля полупросты.*

Доказательство: пусть $N \subset M$, M — полупрост и $N' \subset N$. Так как M полупрост, существует $M'' \subset M$, так что $M = N' \oplus M''$. Тогда $N = N' \oplus (N \cap M'')$, значит N полупрост. Аналогично, пусть $f : M \to N$ — эпиморфизм, и $N' \subset N$. Тогда $f^{-1}(N') \subset M$ и найдется $M'' \subset M$, так что $M = f^{-1}(N') \oplus M''$. Тогда $N = N' \oplus f(M'')$, значит N полупрост. □

Лемма 1.9. *Всякий полупростой модуль содержит простой подмодуль.*

Доказательство: рассмотрим ненулевой подмодуль $Am \subset M$. Ясно, что $Am \cong A/I$, где $I \subset A$ — идеал. Выберем максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset A$, такой что $I \subset \mathfrak{m}$. Ясно, что $\mathfrak{m}/I \subset A/I$ — подмодуль, но $A/I \subset M$, поэтому A/I полупрост, значит найдется подмодуль $M' \subset A/I$, такой что $A/I = \mathfrak{m}/I \oplus M'$. Покажем, что M' — простой модуль. Действительно, если $M'' \subset M'$, то $\mathfrak{m}/I \oplus M'' \subset A/I$, что в силу максимальности $\mathfrak{m}$ влечет либо $M'' = 0$, либо $M'' = M$. □

Замечание 1.10. Условие полупростоты здесь существенно. Например, если $A = \mathsf{k}[x]$, $M = A$, то всякий подмодуль в M изоморфен A (т.к. A — область главных идеалов), поэтому не является простым.

Теорема 1.11. *Модуль M полупрост $\Longleftrightarrow$ он является прямой суммой простых модулей.*

Доказательство: $\Longleftarrow$) уже доказано, докажем $\Longrightarrow$). Идея такая: выберем простой подмодуль $M_1 \subset M$, отщепим его прямым слагаемым $M = M_1 \oplus M'$, выберем простой подмодуль $M_2 \subset M'$, отщепим его прямым слагаемым $M' = M_2 \oplus M''$, и т.д. Формализуется это рассуждение так: рассмотрим множество подмодулей в M, являющихся прямыми суммами простых, и введем на нем отношение порядка, положив $M' < M''$, если $M'' = M' \oplus (\oplus M_i)$, где все M_i простые. Ясно, что всякая возрастающая цепочка содержит наибольший элемент — им является прямая сумма всех простых модулей, в сумму которых раскладываются дополнительные прямые слагаемые. Поэтому найдется максимальный подмодуль $M' \subset M$, являющийся прямой суммой простых. Покажем, что $M' = M$. Действительно, в противном случае найдется ненулевой подмодуль $M'' \subset M$, такой что $M = M' \oplus M''$. Так как M'' полупрост, то он содержит простой подмодуль $M''' \subset M''$ и модуль $M' \oplus M''' \subset M$ строго больше чем M'. □

Следствие 1.12. *Прямая сумма полупростых модулей полупроста.*

Часть 2. Полупростые кольца

Определение 2.1. Кольцо A называется полупростым, если всякий A является полупростым A-модулем.

Примеры 2.2.
1. Тело является полупростым кольцом;
2. кольцо матриц с коэффициентами в поле полупросто;
3. прямое произведение полупростых колец полупросто.

Лемма 2.3. *Любой модуль над полупростым кольцом полупрост.*

Доказательство: любой модуль является фатором свободного модуля. □

Пусть A полупростое кольцо. Каждый идеал в кольце A является A-модулем. Обратно, всякий подмодуль в A-модуле A — это идеал. Идеал называется простым, если он является простым A-модулем. Ясно, что A раскладывается в прямую сумму простых идеалов.

Лемма 2.4. *Если L — простой идеал, а M — простой модуль, то либо $M \cong L$, либо $LM = 0$.*

Доказателство: так как L идеал, то LM есть подмодуль в M, поэтому либо $LM = 0$, либо $LM = M$. Если $LM = M$, то найдется $m \in M$, так что $Lm \neq 0$, но Lm — подмодуль в M, поэтому $Lm = M$. Значит, умножение на m является эпиморфизмом $L \to M$. Его ядро есть подмодуль в L, следовательно равно нулю, следовательно $L \cong M$. □

Следствие 2.5. *Всякий простой A-модуль изоморфен простому идеалу.*

Доказательство: если $M \not\cong L$ для всех простых идеалов L в A, то $M = AM = (\oplus L)M = \oplus LM = 0$. □

Следствие 2.6. *Если L, L' — идеалы в A, неизоморфные как A-модули, то $LL' = 0$.*

Пусть L_i — простые идеалы, представляющие разные классы изоморфизма простых A-модулей, и A_i — сумма всех простых идеалов в A, изоморфных L_i.

Лемма 2.7. *Имеем $A = \oplus A_i$.*

Доказательство: разложим A в прямую сумму простых идеалов и обозначим через A_i' сумму тех из них, которые изоморфны идеалу L_i. Тогда $A = \oplus A_i'$. Ясно, что $\mathrm{Hom}_A(L_i, A_j') = 0$ при $i \neq j$, поэтому всякий простой идеал, изоморфный идеалу L_i содержится в слагаемом $A_i' = \mathrm{Ker}(A \to \oplus_{j \neq i} A_j')$. Значит $A_i' = A_i$ и $A = \oplus A_i$.

Лемма 2.8. *Имеем $A_i A_j = 0$ при $i \neq j$ и $A_i A_i = A_i$.*

Доказательство: $A_i A_j = (\oplus L_{is})(\oplus L_{jt}) = \oplus L_{is} L_{jt} = 0$ при $i \neq j$, а $A_i A_i = (\oplus A_j) A_i = A A_i = A_i$. □

Теорема 2.9. *Количество классов изоморфизма простых идеалов конечно, каждый идеал A_i двусторонний, является кольцом, и $A = \prod A_i$. В каждом из колец A_i все простые идеалы изоморфны.*

Доказательство: разложим единицу кольца A относительно разложения $A = \oplus A_i$: $1 = \sum e_i$, количество ненулевых слагаемых конечно по определению прямой суммы. Ясно, что $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$, поэтому $\sum e_i = 1 = 1 \cdot 1 = (\sum e_i)(\sum e_i) = \sum e_i^2$, значит $e_i^2 = e_i$. Наконец, $A_i = 1A_i = (\sum e_j)A_i = e_i A_i = e_i A$, поэтому A_i только конечное число, каждый из них является правым (а значит и двусторонним) идеалом, и кольцом (единица — это e_i). Так как e_i — ортогональные идемпотенты, то A раскладывается в произведение колец A_i. Наконец, каждый простой идеал в A_i является простым A-модулем, следовательно все они изоморфны как A-модули, а значит и как A_i-модули. $\square$

Часть 3. Простые кольца

Определение 3.1. Полупростое кольцо называется простым, если в нем все простые идеалы изоморфны.

Лемма 3.2. *Простое кольцо является прямой суммой конечного числа простых идеалов, не содержит нетривиальных двусторонних идеалов, и для любых простых иделов $L, L' \subset A$ найдется элемент $a \in A$, так что $La = L'$.*

Доказательство: разложим A в прямую сумму простых левых идеалов $A = \oplus L_i$, и разложим единицу $1 = \sum e_i$. В этом разложении лишь конечное число ненулевых слагаемых. Кроме того, $A = A \cdot 1 = A(\sum e_i) \subset \oplus_{e_i \neq 0} L_i$, поэтому лишь конечное число L_i отлично от нуля. Далее, если L, L' — простые идеалы, и $f : L \to L'$ — их изоморфизм как A-модулей, а $\pi : A \to L$, $i : L' \to A$ — проекция и вложение, то $i \circ f \circ \pi$ — эдоморфизм A, а всякий эндоморфизм A — это правое умножение, поэтому найдется $a \in A$, такое что $L' = (i \circ f \circ \pi)(L) = La$. Наконец, если $I \subset A$ — нетривиальный идеал, то $A = I \oplus M$, выберем простые идеалы $L \subset I$, $L' \subset M$ и найдем элемент $a \in A$, такой что $La = L'$. Тогда $Ia \not\subset I$, поэтому I не двусторонний. $\square$

Теорема 3.3. *Пусть $D = \mathrm{End}_A(L)$ — тело эндоморфзмов простого идеала. Тогда L — конечномерный D-модуль и $A \cong \mathrm{End}_D(L)$.*

Доказательство: действие всякого элемента из A на L коммутирует с действием всякого элемента из D, поэтому существует канонический гомоморфизм $\lambda : A \to \mathrm{End}_D(L)$. Его ядро — двусторонний идеал, поэтому $\mathrm{Ker}\,\lambda = 0$ ($\mathrm{Ker}\,\lambda \neq A$, так как $1 \notin \mathrm{Ker}\,\lambda$), значит λ — вложение. Наконец, $LA \subset A$ — двусторонний идеал, поэтому $LA = A$, а $\lambda(L) \subset \mathrm{End}_D(L)$ — идеал, так как для любого эндоморфизма $f \in \mathrm{End}_D(L)$ и $l, x \in L$ имеем $(f \circ \lambda(l))(x) = f(lx) = f(l)x = \lambda(f(l))(x)$. Следовательно, $\mathrm{End}_D(L) = \mathrm{End}_D(L)\lambda(A) = \mathrm{End}_D(L)\lambda(LA) = \mathrm{End}_D(L)\lambda(L)\lambda(A) = \lambda(L)\lambda(A) = \lambda(LA) = \lambda(A)$, поэтому λ сюръективно. Остается проверить, что L является D-модулем конечного ранга. Действительно, если бы L имел бесконечный ранг над D, то алгебра $A \cong \mathrm{End}_D(L)$ раскладывалась бы в бесконечную прямую сумму простых идеалов, что противоречит доказанному выше утверждению. $\square$

Лемма 3.4. *Если L — конечномерный D-модуль, то алгебра $A = \mathrm{End}_D(L)$ проста и $D = \mathrm{End}_A(L)$.*

Доказательство: так как L является свободным D-модулем, и любой ненулевой элемент в L дополняется до базиса, то алгебра $A = \mathrm{End}_D(L)$ действует транзитивно на множестве ненулевых элементов, поэтому L является простым A-модулем. Далее, выберем базис $(v_1, \ldots, v_n)$ модуля L над D. Тогда $A = \oplus_{i=1}^n L_i$, где $L_i \subset \mathrm{End}_D(L)$ — эндоморфзмы, зануляющиеся на всех v_j при $j \neq i$. При этом отображение $f \mapsto f(v_i)$ задает изоморфизм модуля L_i с L. Наконец, пусть $\phi \in \mathrm{End}_A(L)$. Коммутируя его с элементарными матрицами E_{ij} заключаем, что ϕ есть умножение на элемент из D. $\square$

Следствие 3.5. *Если A — полупростая алгебра над полем k, то A есть конечное произведение матричных алгебр над телами над k.*

Следствие 3.6. *Если A — коммутативная полупростая алгебра над полем k, то A есть конечное произведение полей, являющихся расширениями поля k.*

Лемма 3.7. *Если поле k алгебраически замкнуто, а D — конечномерное тело над k, то $D = \mathsf{k}$.*

Доказательство: всякий элемент из D алгебраичен над k. $\square$

Следствие 3.8. *Если A — полупростая алгебра конечномерная над алгебраически замкнутым полем, то A есть конечное произведение матричных алгебр.*