Задачи по алгебре к 10 ноября 2003 г.

1. Пусть алгебра A конечномерна. Докажите, что
a) $x \in \mathfrak{R}_A \iff x$ действует нулем во всех простых левых A-модулях;
b) $x \in \mathfrak{R}_A \iff x$ действует нулем во всех простых правых A-модулях;
c) $\mathfrak{R}_A$ равен пересечению всех правых максимальных идеалов.

2. Пусть K'/K — алгебраическое расширение полей. Докажите, что $K' \otimes_K L$ — полупростая алгебра для всех $L \iff$ расширение K'/K сепарабельно.

3. Пусть D — тело над K, а B — K-алгебра. Докажите, что
a) двусторонние идеалы в алгебре $D \otimes_K B$ порождаются двусторонними идеалами в алгебре $Z(D) \otimes_K B$;
b) если $Z(D) = K$, а B — простая, то $D \otimes_K B$ — простая.

4. Докажите, что тензорное произведение центральных простых алгебр над полем K является центральной простой алгеброй над полем K.

5. Докажите, что $A^{\mathrm{op}} \otimes_K A$ — матричная алгебра над полем K.

6. Докажите, что
a) множество классов подобия центральных простых алгебр над полем K с операцией $\otimes$ образуют группу;
b) эта группа изоморфна группе Брауэра поля K.

7. Вычислите группу Брауэра поля a) $\mathbb{R}$; b) $\mathbb{F}_q$.

8. Найдите все центральные тела над полем a) $\mathbb{R}$; b) $\mathbb{F}_q$.

9. Докажите, что a) $H^0(\mathrm{Gal}(L/K), L^*) = K^*$; b) $H^1(\mathrm{Gal}(L/K), L^*) = 0$ (теорема Гильберта-90).