Задачи по алгебре к 15 сентября 2003 г.

1. Если (f_A, f_B, f_C) — — морфизм точных троек, то точна последовательность $0 \to \operatorname{Ker} f_A \to \operatorname{Ker} f_B \to \operatorname{Ker} f_C \to A'/\operatorname{Im} f_A \to B'/\operatorname{Im} f_B \to C'/\operatorname{Im} f_C \to 0$.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_A} & & \downarrow{\scriptstyle f_B} & & \downarrow{\scriptstyle f_C} & & \\ 0 & \to & A' & \to & B' & \to & C' & \to & 0 \end{array}$$

2. Если в коммутативной диаграмме строки точны, f_1 — эпиморфизм, f_5 — мономорфизм, а f_2 и f_4 — изоморфизмы, то f_3 — изоморфизм.

$$\begin{array}{ccccccccccc} X_1 & \to & X_2 & \to & X_3 & \to & X_4 & \to & X_5 \\ \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_4} & & \downarrow{\scriptstyle f_5} \\ Y_1 & \to & Y_2 & \to & Y_3 & \to & Y_4 & \to & Y_5 \end{array}$$

3. Пусть $\mathcal{A} = \operatorname{Mod} -A$ — категория модулей над кольцом A. Докажите, что a) комплексы в $\mathcal{A}$ и морфизмы комплексов образуют категорию $\mathsf{Com}\mathcal{A}$; b) $H^i : \mathsf{Com}\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ — функтор; c) в категории $\mathsf{Com}\mathcal{A}$ существуют ядра и образы; d) постройте функтор свертки $\operatorname{Tot} : \mathsf{Bicom}\mathcal{A} := \mathsf{ComCom}\mathcal{A} \to \mathsf{Com}\mathcal{A}$.

4. Морфизмы комплексов $f, f' : E^\bullet \to F^\bullet$ называются гомотопными, если найдется набор морфизмов $h^i : E^i \to F^{i-1}$, такой что $f'^i - f^i = h^{i+1} d_E^i + d_F^{i-1} h^i$. Докажите, что a) гомотопия — отношение эквивалентности; b) если $f \sim f'$, то $H^\bullet f = H^\bullet f'$; c) если $\operatorname{Id}_{E^\bullet} \sim 0$, то $E^\bullet$ — ацикличен; d) множество морфизмов гомотопных нулю — идеал в кольце $\operatorname{Hom}_{\mathsf{Com}\mathcal{A}}(E^\bullet, E^\bullet)$; e) если $\operatorname{Ob}(\mathsf{Hot}\mathcal{A}) = \operatorname{Ob}(\mathsf{Com}\mathcal{A})$, $\operatorname{Hom}_{\mathsf{Hot}\mathcal{A}}(E^\bullet, F^\bullet) = \operatorname{Hom}_{\mathsf{Com}\mathcal{A}}(E^\bullet, F^\bullet)/\sim$, то Hot — категория (гомотопическая категория); f) функтор когомологий $\mathsf{Com}\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ пропускается через $\mathsf{Hot}\mathcal{A}$.

5. Пусть $E^\bullet$ и $F^\bullet$ — комплексы. Пусть $\operatorname{RHom}^k(E^\bullet, F^\bullet) := \oplus_{i \in \mathbb{Z}} \operatorname{Hom}(E^i, F^{i+k})$ и рассмотрим отображения $D^k : \operatorname{RHom}^k \to \operatorname{RHom}^{k+1}$, $(f_i) \mapsto (d_F^{i+k} \circ f^i - (-1)^k f^{i+1} \circ d_E^i)$. Докажите, что a) $(\operatorname{RHom}^\bullet, D^\bullet)$ — комплекс; b) $Z^0 = \{$ морфизмы комплексов $\}$, c) $B^0 = \{$ морфизмы, гомотопные нулю $\}$; d) $H^0 = \operatorname{Hom}_{\mathsf{Hot}}(E^\bullet, F^\bullet)$.

6. Пусть X — топологическое пространство, а F — конечно-порожденная абелева группа. Постройте точные последовательности a) $0 \to \mathbb{Z}^{\oplus a} \to \mathbb{Z}^{\oplus b} \to F \to 0$; b) $0 \to C_\bullet(X)^{\oplus a} \to C_\bullet(X)^{\oplus b} \to C_\bullet(X) \otimes_{\mathbb{Z}} F \to 0$; c) (формула универсальных коэффициентов) $0 \to H_i(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} F \to H_i(X, F) \to \operatorname{Tor}_1(H_{i-1}(X, \mathbb{Z}), F) \to 0$, где $\operatorname{Tor}_1(H_{i-1}(X, \mathbb{Z}), F) := \operatorname{Ker}(H_{i-1}(X, \mathbb{Z})^{\oplus a} \to H_{i-1}(X, \mathbb{Z})^{\oplus b})$; d) $H_i(X, \mathbb{Q}) = H_i(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

7. Докажите, что $H_1(G, \mathbb{Z}) \cong G/[G, G]$.