**Задачи по алгебре к 22 сентября 2003 г.**

1. Докажите, что $H^1(G,\mathbb{Z}) = (G/[G,G])^*$.

2. Пусть $0 \to M \to P^0 \to P^1 \to \ldots$ — точная последовательность, в которых $H^i(G,P^n) = 0$ при $i > 0$ и всех $n$ (ациклична резольвента). Докажите, что $H^i(G,M) \cong H^i(P^{\bullet G})$.

3. Пусть $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, а $M$ — $G$-модуль. Докажите, что a) $H^i(G,M[G]) = 0$ при $i > 0$ и $H^0(G,M[G]) = M$; b) $0 \to M \to M[G] \xrightarrow{1-t} M[G] \xrightarrow{N} M[G] \xrightarrow{1-t} \ldots$ — ацикличная резольвента. c) Вычислите $H^i(G,M)$.

4. Пусть $p, q$ — простые и $p < q$. Вычислите a) $H^2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$; b) $H^2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

5. Докажите, что расширение групп $1 \to N \to E \to G \to 1$ расщепимо $\Longleftrightarrow E = N \leftthreetimes G$.

6. Докажите, что множество всех классов расщеплений расширения $1 \to N \to N \leftthreetimes G \to G \to 1$ по модулю сопряжения элементами из $N$, изоморфно группе $H^1(G,N)$.

7. Пусть $\xi : G_1 \times G_2 \to N$ — 2-коцикл. Докажите, что
a) операция $(n_1,g_1)\cdot(n_2,g_2) = (n_1 + g_1n_2 + \xi(g_1,g_2), g_1g_2)$ на множестве $N \times G$ ассоциативна;
b) элемент $(-\xi(1,1),1)$ является единицей;
c) элемент $(-g^{-1}(\xi(1,1) + \xi(g,g^{-1}) + n), g^{-1})$ — обратный к $(n,g)$;
d) отображения $n \mapsto (n - \xi(1,1), 1)$ и $(n,g) \mapsto g$ дают расширение групп;
e) если $\xi$ — кограница, то полученное расширение расщепимо.

8. Расширение называется центральным, если $N \subset Z(E)$. Докажите, что множество центральных расширение $G$ с помощью $N$ изоморфно группе $H^2(G,N)$, где $N$ — тривиальный $G$-модуль.

9. Пусть $1 \to N \xrightarrow{i_1} E_1 \xrightarrow{f_1} G \to 1$ и $1 \to N \xrightarrow{i_2} E_2 \xrightarrow{f_2} G \to 1$ — абелевы расширения групп. Докажите, что
a) расслоенное произведение $E_1 \times_G E_2 := \{\, (x_1,x_2) \mid f_1(x_1) = f_2(x_2) \,\}$ является подгруппой в $E_1 \times E_2$;
b) если действия $\overline{\mathrm{Ad}}_1$ и $\overline{\mathrm{Ad}}_2$ совпадают, то $i : N \to E_1 \times_G E_2$, $n \mapsto (i_1(n), i_2(n^{-1}))$ — нормальное вложение;
c) последовательность $1 \to N \xrightarrow{i_1} \dfrac{E_1 \times_G E_2}{i(N)} \xrightarrow{f_1} G \to 1$ — абелево расширение групп;
d) построенная операция вводит на множестве абелевых расширений, индуцирующих данное действие, структуру абелевой группы, совпадающую со структурой группы $H^2(G,N)$.

10. Пусть $G$, $N$ — группы и $\bar{A} : G \to \mathrm{Out}(N)$ — гомоморфизм. Выберем его теоретико-множественное поднятие $\tilde{A} : G \to \mathrm{Aut}(N)$. Докажите, что
a) найдется отображение $\xi : G \times G \to N$, такое что $\tilde{A}(g_1) \circ \tilde{A}(g_2) = \mathrm{Ad}_{\xi(g_1,g_2)} \circ \tilde{A}(g_1g_2)$;
b) $\mathrm{Ad}_{\xi(g_1,g_2)} \circ \mathrm{Ad}_{\xi(g_1g_2,g_3)} = \mathrm{Ad}_{\tilde{A}(g_1)\xi(g_2,g_3)} \circ \mathrm{Ad}_{\xi(g_1,g_2g_3)}$;
c) найдется отображение $\zeta : G \times G \times G \to Z(N)$, т.ч. $\zeta(g_1,g_2,g_3)\xi(g_1,g_2)\xi(g_1g_2,g_3) = (\tilde{A}(g_1)\xi(g_2,g_3))\xi(g_1,g_2g_3)$;
d) $\zeta$ — 3-коцикл группы $G$ со значениями в $Z(N)$;
e) $\bar{\zeta} \in H^3(G,Z(N))$ не зависит от выборов $\tilde{A}$, $\xi$ и $\zeta$;
f) если $\bar{\zeta} = 0$, то $\xi$ можно выбрать так, что $\xi(g_1,g_2)\xi(g_1g_2,g_3) = (\tilde{A}(g_1)\xi(g_2,g_3))\xi(g_1,g_2g_3)$;
g) два таких выбора различаются на 2-коцикл группы $G$ со значениями в $Z(N)$;
h) всякому такому $\xi$ можно сопоставить расширение $G$ с помощью $N$;
i) если $\bar{\zeta} = 0$, то множество расширений $G$ с помощью $N$, таких что $\overline{\mathrm{Ad}} = \bar{A}$, изоморфно $H^2(G,Z(N))$, а если $\bar{\zeta} \neq 0$, то оно пусто.