Задачи по алгебре к 29 сентября 2003 г.

1. Докажите, что
a) $\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$, если $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}$ или $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{c}$ (модулярность);
b) $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subset \mathfrak{a}\mathfrak{b}$;
c) $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, если $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$.

2. Докажите, что если $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = A$ для всех $1 \leqslant i < j \leqslant n$, то $A / \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i \cong \prod_{i=1}^n (A/\mathfrak{a}_i)$.

3. Докажите, что
a) если $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ — простые и $\mathfrak{a} \subset \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$, то $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_i$ для некоторого i;
b) если $\mathfrak{p}$ — простой и $\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$, то $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$ для некоторого i;
c) если $\mathfrak{p}$ — простой и $\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i = \mathfrak{p}$, то $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{p}$ для некоторого i.

4. Частным идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ назывется идеал $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) = \{\, x \in A \mid x\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \,\}$. Докажите, что
a) $\mathfrak{a} \subset (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$; b) $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$; c) $((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}\mathfrak{c}) = ((\mathfrak{a} : \mathfrak{c}) : \mathfrak{b})$;
d) $(\bigcap \mathfrak{a}_i : \mathfrak{b}) = \bigcap (\mathfrak{a}_i : \mathfrak{b})$; e) $(\mathfrak{a} : \sum \mathfrak{b}_i) = \bigcap (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}_i)$.

5. Докажите, что
a) $\mathfrak{r}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{r}(\mathfrak{b})$; b) $\mathfrak{r}(\mathfrak{a}) = A \iff \mathfrak{a} = A$;
c) $\mathfrak{r}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{r}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{r}(\mathfrak{b}))$; d) $\mathfrak{r}(\mathfrak{p}^n) = \mathfrak{p}$.

6. Аннулятором идеала $\mathfrak{a}$ называется идеал $\operatorname{Ann}(\mathfrak{a}) := (0 : \mathfrak{a}) = \{\, x \in A \mid x\mathfrak{a} = 0 \,\}$. Докажите, что множество делителей нуля совпадает с множеством a) $\bigcup_{x \neq 0} \operatorname{Ann}((x))$; b) $\bigcup_{x \neq 0} \mathfrak{r}(\operatorname{Ann}((x)))$.

7. Вычислите в кольце $\mathbb{Z}$ сумму, произведение, пересечение, частное и радикал идеалов.

8. Докажите, что множество простых идеалов имеет минимальные по включению элементы.

9. Радикалом Джекобсона $\mathfrak{R}$ кольца A называется пересечение всех максимальных идеалов в A. Докажите, что a) $x \in \mathfrak{R} \iff 1 - xy$ обратим при всех $y \in A$; b) $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{R}$.

10. Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие. Докажите, что
a) на X существует единственная топология на X, в которой замкнутыми подмножествами являются подмногообразия (топология Зарисского);
b) X — неприводимо $\iff$ всякое непустое открытое подмножество в X всюду плотно;
c) замыкание неприводимого множества неприводимо.

11. Спектром кольца A называется топологическое пространство $\operatorname{Spec} A$, точки которого — это простые идеалы в A, а замкнутые подмножества — подмножества вида $V(\mathfrak{a}) = \{\, \mathfrak{p} \subset A \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \,\}$.
a) Нарисуйте $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, $\operatorname{Spec} \mathbb{R}$, $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x]$, $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x]$.
Пусть $\mathfrak{p}_x$— простой идеал в A, соответствующий точке $x \in \operatorname{Spec} A$. Докажите, что
b) точка $x \in \operatorname{Spec} A$ замкнута $\iff$ идеал $\mathfrak{p}_x$ максимален;
c) $\overline{\{\, x \,\}} = V(\mathfrak{p}_x)$;
d) $y \in \overline{\{\, x \,\}} \iff \mathfrak{p}_x \subset \mathfrak{p}_y$.

12. Докажите, что
a) множества $U_f = \operatorname{Spec} A \setminus V((f))$ образуют базис открытых множеств в топологии Зарисского;
b) $U_f \cap U_g = U_{fg}$;
c) $U_f = \emptyset \iff f$ — нильпотент;
d) $U_f = \operatorname{Spec} A \iff f$ обратим;
e) $U_f = U_g \iff \mathfrak{r}((f)) = \mathfrak{r}((g))$.

13. Пусть $\phi : A \to B$ — гомоморфизм колец. Пусть $\phi^* : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$, $\mathfrak{q} \mapsto \phi^{-1}(\mathfrak{q})$. Докажите, что
a) $\phi^{*-1}(U_f) = U_{\phi(f)}$;
b) ϕ^* — непрерывно;
c) если ϕ сюръективен, то $\phi^* : \operatorname{Spec} B \to V(\operatorname{Ker} \phi) \subset \operatorname{Spec} A$ — гомеоморфизм;
d) $\operatorname{Spec} A \cong \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{N})$;
e) если ϕ инъективен, то $\phi^*(\operatorname{Spec} B)$ плотно в $\operatorname{Spec} A$;
f) $A \mapsto \operatorname{Spec} A$, $\phi \mapsto \phi^*$ — контравариантный функтор $\mathcal{C}omm \to \mathcal{T}op$.

14. Докажите, что a) $\operatorname{Spec}(A \times B) = \operatorname{Spec} A \bigsqcup \operatorname{Spec} B$; b) $\operatorname{Spec}(A \otimes_{\mathsf{k}} B) = \operatorname{Spec} A \times \operatorname{Spec} B$.