Задачи по алгебре к 06 октября 2003 г.

1. Пусть Σ — частично упорядоченное множество. Докажите эквивалентность условий (i) всякая возрастающая цепочка стабилизируется; (ii) любое непустое подмножество в Σ содержит максимальный элемент.

2. Модуль M над кольцом A называется артиновым, если всякая убывающая цепочка подмодулей в M стабилизируется. Проверьте, являются ли следующие $\mathbb{Z}$-модули нетеровыми и артиновыми:
a) конечная абелева группа; b) $\mathbb{Z}$; c) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$; d) $\{\, m/p^n \in \mathbb{Q} \,\} \subset \mathbb{Q}$.

3. Докажите, что a) если $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ — точная тройка, то M артинов $\iff M'$ и M'' артиновы;
b) если M_i — артиновы A-модули, то $\oplus_{i=1}^n M_i$ — артинов.

4. Кольцо A называется артиновым, если A является артиновым A-модулем. Проверьте, являются ли следующие кольца нетеровыми и артиновыми: a) k; b) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; c) $\mathbb{Z}$; d) $\mathsf{k}[x]/f(x)\mathsf{k}[x]$; e) $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$; f) $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n, \ldots]$.

5. Докажите, что a) прямое произведение нетеровых колец нетерово; b) прямое произведение артиновых колец артиново. c) факторкольцо артинова кольца артиново; d) кольцо $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n})_{k_1+\cdots+k_n=m}$ артиново; e) если $X \subset \mathbb{A}^n$ — конечный набор точек и $I_X^m \subset I \subset I_X$, то $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]/I$ — артиново кольцо.

6. Докажите, что конечно порожденный модуль над артиновым кольцом артинов.

7. Ненулевой модуль M называется простым, если у него нет нетривиальных подмодулей. Модуль M называется модулем конечной длины, если существует цепочка $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$, в которой все факторы M_i/M_{i-1} просты. Такая цепочка называется композиционным рядом модуля M. Докажите, что
a) $0 = M_0 \subset M_1 \cdots \subset M_n = M$ — к.р. и $N \subset M$, то $0 = N \cap M_0 \subset N \cap M_1 \cdots \subset N \cap M_n = N$ — к.р.;
b) если $\ell(M)$ — длина минимального к.р. M, то $N \subset M \implies \ell(N) \leqslant \ell(M)$, причем $\ell(N) = \ell(M) \implies N = M$;
c) всякая цепочка подмодулей в M без повторений имеет длину не больше $\ell(M)$;
d) длины всех к.р. модуля M равны;
e) последовательности фактормодулей в двух к.р. модуля M совпадают.

8. Докажите, что a) M — модуль конечной длины $\iff M$ артинов и нетеров;
b) если $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ — точная тройка, то M — модуль конечной длины $\iff M'$ и M'' — модули конечной длины, причем $\ell(M) = \ell(M') + \ell(M'')$;
c) если M_i — модули конечной длины, то $\oplus_{i=1}^n M_i$ — модуль конечной длины, причем $\ell(\oplus_{i=1}^n M_i) = \sum_{i=1}^n \ell(M_i)$.

9. Докажите, что a) если M — простой $\mathbb{C}[x]$-модуль, то $M \cong \mathbb{C}[x]/(x-\lambda)\mathbb{C}[x]$; b) если M — $\mathbb{C}[x]$-модуль конечной длины, то $M \cong \mathbb{C}[x]/f(x)\mathbb{C}[x]$; c) категория $\mathbb{C}[x]$-модулей конечной длины эквивалентна категории конечномерных векторных пространств с эндоморфизмом; d) категория $\mathbb{C}[x, y]$-модулей конечной длины эквивалентна категории конечномерных векторных пространств с парой коммутирующих эндоморфизмов.

10. Пусть M — A-модуль, а $u : M \to M$ — эндоморфизм. Докажите, что
a) если M нетеров, а u сюръективен, то u — изоморфизм (рассмотрите цепочку подмодулей $\operatorname{Ker} u^n$);
b) если M артинов, а u инъективен, то u — изоморфизм (рассмотрите цепочку подмодулей $\operatorname{Im} u^n$).

11. Докажите, что если A — нетерово кольцо, то кольцо $A[[x]]$ тоже нетерово.

12. Пусть A — артиново кольцо. Докажите, что
a) если A целостное, то A поле (рассмотрите цепочку идеалов (x^n));
b) всякий простой идеал в A максимален;
c) $\mathfrak{N}_A = \mathfrak{R}_A$;
d) множество максимальных идеалов в A конечно;
e*) существует целое число n, такое что $\mathfrak{N}_A^n = 0$;
f*) кольцо A нетерово.
g*) кольцо A имеет вид кольца из задачи 5e.
(Иначе говоря, артиновы кольца соответствуют нульмерным многообразиям.)