Задачи по алгебре к 13 октября 2003 г.

1. A-модуль P называется проективным, если для всякого эпиморфизма $f : M \to M'$ и всякого морфизма $\phi' : P \to M'$ найдется морфизм $\phi : P \to M$, такой что $\phi' = f \circ \phi$. A-модуль I называется инъективным, если для всякого мономорфизма $f : M' \to M$ и всякого морфизма $\phi' : M' \to I$ найдется морфизм $\phi : M \to I$, такой что $\phi' = \phi \circ f$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\phi"'] \arrow[dr, "\phi'"] & \\ M \arrow[rr, two heads, "f"] & & M' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M' \arrow[rr, hook, "f"] \arrow[dr, "\phi'"'] & & M \arrow[dl, dashed, "\phi"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

Докажите, что a) функтор $\mathrm{Hom}_A(P, -)$ точен $\iff P$ — проективный A-модуль;
b) функтор $\mathrm{Hom}_A(-, I)$ точен $\iff I$ — инъективный A-модуль.

2. Докажите, что a) P проективен $\iff$ любая точная тройка $0 \to M \to N \to P \to 0$ расщепляется;
b) модуль P проективен $\iff$ найдется P', так что $P \oplus P'$ свободен;
c) функтор $\mathrm{Ext}(M, -)$ можно вычислять с помощью проективной резольвенты модуля M.

3. Пусть A — коммутативная k-алгебра. Пусть $M^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathsf{k}}(M, \mathsf{k})$. Докажите, что
a) $M^\vee$ обладает естественной структурой A-модуля;
b) отображение $M \to M^{\vee\vee}$ — мономорфизм A-модулей;
c) $\mathrm{Hom}_A(M, N) \cong M^\vee \otimes_A N$;
d) если A — k-алгебра, а P — проективный A-модуль, то модуль $P^\vee$ инъективен;
e) всякий A-модуль вкладывается в инъективный A-модуль;
f) всякий A-модуль имеет правую инъективную резольвенту;
g) I инъективен $\iff$ любая точная тройка $0 \to I \to M \to N \to 0$ расщепляется;
h) функтор $\mathrm{Ext}(-, N)$ можно вычислять с помощью инъективной резольвенты модуля N.

4. (Цилиндр морфизма.) Пусть $f : K^\bullet \to L^\bullet$ — морфизм комплексов. Докажите, что
a) $\mathrm{Cyl}(f)^i = L^i \oplus K^i \oplus K^{i+1}$, $d^i_{\mathrm{Cyl}(f)}(l^i, k^i, k^{i+1}) = (d^i_L(l_i) + f^{i+1}(k^{i+1}), d^i_K(k^i) - k^{i+1}, -d^{i+1}_K(k^{i+1}))$ — комплекс;
b) отображение $\bar{f} : K^\bullet \to \mathrm{Cyl}(f)^i$, $k^i \mapsto (0, k^i, 0)$ — морфизм комплексов;
c) отображение $\alpha : L^\bullet \to \mathrm{Cyl}(f)^\bullet$, $l^i \mapsto (l^i, 0, 0)$ — морфизм комплексов;
d) отображение $\beta : \mathrm{Cyl}(f)^\bullet \to L^\bullet$, $(l^i, k^i, k^{i+1}) \mapsto l^i + f(k^i)$ — морфизм комплексов;
e) $\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_{L^\bullet}$;
f) $\alpha \circ \beta \sim \mathrm{Id}_{\mathrm{Cyl}(f)^\bullet}$, где $h^i(l^i, k^i, k^{i+1}) = (0, 0, k^i)$;
g) морфизмы α и β индуцируют изоморфизм когомологий;
h) $\beta \circ \bar{f} = f$.

5. (Конус морфизма.) Пусть $f : K^\bullet \to L^\bullet$ — морфизм комплексов. Докажите, что
a) $\mathrm{C}(f)^i = L^i \oplus K^{i+1}$, $d^i_{\mathrm{C}(f)}(l^i, k^{i+1}) = (d^i_L(l_i) + f^{i+1}(k^{i+1}), -d^{i+1}_K(k^{i+1}))$ — комплекс;
b) отображение $\pi f : \mathrm{Cyl}(f)^\bullet \to \mathrm{C}(f)^i$, $(l^i, k^i, k^{i+1}) \mapsto (l^i, k^{i+1})$ — морфизм комплексов;
c) отображение $\bar{\pi} : L^\bullet \to \mathrm{C}(f)^\bullet$, $l^i \mapsto (l^i, 0)$ — морфизм комплексов;
d) отображение $\delta : \mathrm{C}(f)^\bullet \to K^{\bullet+1}$, $(l^i, k^{i+1}) \mapsto k^{i+1}$ — морфизм комплексов;
e) $0 \to K^\bullet \xrightarrow{\bar{f}} \mathrm{Cyl}(f)^\bullet \xrightarrow{\pi} \mathrm{C}(f)^\bullet \to 0$ — точная последовательность комплексов;
f) $0 \to L^\bullet \xrightarrow{\bar{\pi}} \mathrm{C}(f)^\bullet \xrightarrow{\delta} K^{\bullet+1} \to 0$ — точная последовательность комплексов;
g) $\pi \circ \alpha = \bar{\pi}$.

6. Пусть $0 \to K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet \to 0$ — точная тройка комплексов. Докажите, что
a) отображение $\gamma : \mathrm{C}(f)^\bullet \to M^\bullet$, $(l^i, k^{i+1}) \mapsto g(l^i)$ — морфизм комплексов;
b) $\gamma \circ \pi = g \circ \beta$;
c) $\mathrm{Ker}\, \gamma = \mathrm{Cyl}(0)$;
d) γ индуцируют изоморфизм когомологий;
e) δ индуцирует связывающий гомоморфизм в точной последовательности когомологий исходного комплекса.

7. Пусть $0 \to N \xrightarrow{i_1} E_1 \xrightarrow{\pi_1} M \to 0$ и $0 \to N \xrightarrow{i_2} E_2 \xrightarrow{\pi_2} M \to 0$ — расширения A-модулей. Докажите, что
a) расслоенное произведение $E_1 \times_M E_2 := \{\, (x_1, x_2) \mid \pi_1(x_1) = \pi_2(x_2) \,\}$ является подмодулем в $E_1 \oplus E_2$;
b) отображение $i : N \to E_1 \times_M E_2$, $n \mapsto (i_1(n), -i_2(n))$ — мономорфизм A-модулей;
c) последовательность $0 \to N \xrightarrow{i_1} (E_1 \times_M E_2)/i(N) \xrightarrow{\pi_1} M \to 0$ — расширение A-модулей;
d) построенная операция вводит на множестве классов эквивалентности расширений A-модулей структуру абелевой группы, совпадающую со структурой группы $\mathrm{Ext}^1_A(M, N)$.

8. Пусть $P_\bullet \to L$, $Q_\bullet \to M$ — проективные резольвенты. Докажите, что
a) если $f : P_s \to M$ представляет элемент $\mathrm{Ext}^s(L,M)$, то существует $f_\bullet : P_{s+\bullet} \to Q_\bullet$, такой что $f = d_0^Q \circ f_0$;
b) если $g : Q_T \to N$ представляет элемент $\mathrm{Ext}^t(M,N)$, то $g \circ f_t : P_{s+t} \to N$ представляет элемент $\mathrm{Ext}^{s+t}(L,N)$;
c) построенное отображение $\mu_{s,t} : \mathrm{Ext}^s(L,M) \times \mathrm{Ext}^t(M,N) \to \mathrm{Ext}^{s+t}(L,N)$ корректно определено;
d) построенное отображение $\mu_{s,t} : \mathrm{Ext}^s(L,M) \times \mathrm{Ext}^t(M,N) \to \mathrm{Ext}^{s+t}(L,N)$ A-билинейно;
e) $\mu_{0,0} : \mathrm{Hom}(L,M) \otimes \mathrm{Hom}(M,N) \to \mathrm{Hom}(L,N)$ совпадает с отображением композиции;
f) $(\mathrm{Ext}^\bullet(M,M), \mu)$— градуированная A-алгебра.

9. (Расширения по Ионеда.) Расширением длины k A-модуля M с помощью A-модуля N называется точная последовательность A-модулей вида $0 \to N \xrightarrow{i} E_k \xrightarrow{f_k} \ldots \xrightarrow{f_2} E_1 \xrightarrow{\pi} M \to 0$. Докажите, что
a) всякому расширению длины k соответствует элемент в $\mathrm{Ext}^k(M,N)$;
b) при замене $E_i' = E_i \oplus E$, $E_{i+1}' = E_{i+1} \oplus E$, $f_{i+1}' = f_{i+1} \oplus \mathrm{Id}_E$, где $1 \leqslant i \leqslant k-1$, класс расширения не меняется;
c) классы изоморфных расширений равны;
d) классы расширений равны $\Longleftrightarrow$ они соединяются цепочкой замен вида (b) и обратных к ним;
e) всякий элемент из $\mathrm{Ext}^k(M,N)$ представляется расширением длины k;
f) если $0 \to M \xrightarrow{j} F_l \xrightarrow{g_l} \ldots \xrightarrow{g_2} F_1 \xrightarrow{\rho} L \to 0$ — другое расширение, то их произведением является расширение $0 \to N \xrightarrow{i} E_k \xrightarrow{f_k} \ldots \xrightarrow{f_2} E_1 \xrightarrow{j \circ \pi} F_l \xrightarrow{g_l} \ldots \xrightarrow{g_2} F_1 \xrightarrow{\rho} L \to 0$.

10. A-модуль N называется плоским, если функтор $- \otimes_A N$ точен. Докажите, что
a) N плоский $\Longleftrightarrow$ для всякого вложения $M' \xrightarrow{f} M$ морфизм $f \otimes 1_N : M' \otimes_A N \to M \otimes_A N$ — вложение;
b) предыдущее условие достаточно проверять только для конечно порожденных A-модулей;
c) N плоский $\Longleftrightarrow$ для всякого идеала $\mathfrak{a} \subset A$ морфизм $\mathfrak{a} \otimes_A N \to A \otimes_A N = N$ — вложение;
d) всякий проективный модуль является плоским;
e) всякий модуль обладает левой плоской резольвентой.

11. Пусть $P_\bullet \to M \to 0$ — проективная резольвента. Определим $\mathrm{Tor}_i^A(M,N) = H_i(P_\bullet \otimes_A N)$. Докажите, что
a) группы $\mathrm{Tor}_i^A(M,N)$ определены однозначно с точностью до канонического изоморфизма;
b) $\mathrm{Tor}_i^A(M,N)$ является функтором как по первому, так и по второму аргументу;
c) $\mathrm{Tor}_i^A(M,N)$ коммутирует с прямыми суммами;
d) $\mathrm{Tor}_0^A(M,N) = M \otimes_A N$;
e) если N плоский, то $\mathrm{Tor}_i^A(M,N) = 0$ при $i > 0$;
f) всякой точной тройке $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ соответствуют функториальные точные последовательности

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1(M'',N) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Tor}_1(M',N) \to \mathrm{Tor}_1(M,N) \to \mathrm{Tor}_1(M'',N) \xrightarrow{\delta} M' \otimes_A N \to M \otimes_A N \to M'' \otimes_A N \to 0$$
$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1(N,M'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{Tor}_1(N,M') \to \mathrm{Tor}_1(N,M) \to \mathrm{Tor}_1(N,M'') \xrightarrow{\delta} N \otimes_A M' \to N \otimes_A M \to N \otimes_A M'' \to 0$$

g) $\mathrm{Tor}_i^A(M,N) \cong \mathrm{Tor}_i^A(N,M)$ — канонический изоморфизм.

12. Докажите, что $H_i(G,M) = \mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},M)$.

13. Вычислите Ext и Tor в категориях a) $\mathbb{Z}$-модулей; b) $\mathbb{C}[x]$-модулей.

14. Опишите все a) проективные; b) инъективные; c) плоские $\mathbb{Z}$-модули.

15. Докажите формулы универсальных коэффициентов:
a) $0 \to H_i(X,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} F \to H_i(X,F) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{i-1}(X,\mathbb{Z}),F) \to 0$;
b) $0 \to H^i(X,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} F \to H^i(X,F) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H^{i+1}(X,\mathbb{Z}),F) \to 0$;
c) $0 \to \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_{i-1}(X,\mathbb{Z}),F) \to H^i(X,F) \to H_i(X,\mathbb{Z})^* \to 0$;
d) $H^i(X,\mathsf{k}) = H_i(X,\mathsf{k})^*$.