Задачи по алгебре к 20 октября 2003 г.

1. Докажите, что если $\mathsf{k} \subset K \subset L$ — башня полей, то $\operatorname{degtr} L/\mathsf{k} = \operatorname{degtr} L/K + \operatorname{degtr} K/\mathsf{k}$.

2. Докажите, что факториальное кольцо целозамкнуто.

3. Пусть $A \subset B$ — целое расширение колец. Докажите, что
a) $x \in A$ обратим в $B \Longrightarrow x$ обратим в A;
b) $\mathfrak{R}_A = \mathfrak{R}_B \cap A$.

4. Докажите, что если $B_1, \ldots, B_n$ целы над A, то $\prod_{i=1}^n B_i$ цело над A.

5. Пусть G конечная группа автоморфизмов кольца A и $A^G \subset A$ — подкольцо инвариантов. Докажите, что $A^G \subset A$ — целое расширение колец.

6. Пусть K — поле частных целозамкнутого кольца A, L/K — конечное расширение Галуа, а $B \subset L$ — целое замыкание A в L. Докажите, что
a) L является полем частных кольца B;
b) B является свободным A-модулем ранга $[L : K]$;
c) $A = B^{\mathrm{Gal}(L/K)}$.

7. Докажите лемму Нетера о нормализации для конечных полей.

8. Найдите целое замыкание кольца $\mathbb{Z}$ в поле a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$; b) $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

9. Существует ли подполе в $\mathbb{C}$ изоморфное $\mathbb{R}$, но отличное от $\mathbb{R}$?

10. Пусть $f : X \to Y$ — сюръективный морфизм, такой что расширение координатных алгебр $A_Y \to A_X$ — целое. Докажите, что f — замкнутое отображение.

11. Приведите пример многообразия X и конечного взаимно однозначного морфизма $f : X \to X$, не являющегося изоморфизмом.