Задачи по алгебре к 27 октября 2003 г.

1. Найдите фактормногообразия
a) $\mathbb{A}^1/\!/\mu_n$; b) $\mathbb{A}^2/\!/\mu_2$, $(x,y) \longleftrightarrow (-x,-y)$; c) $\mathbb{A}^4/\!/\mathfrak{S}_2$, $(x_1,x_2,y_1,y_2) \longleftrightarrow (x_2,x_1,y_2,y_1)$.

2. Категорным фактором многообразия X по действию группы G называется универсальный отталкивающий объект в категории пар (Y,f), где Y — многообразие, $f : X \to Y$ — морфизм многообразий, такой что $f\circ g = f$для всех $g \in G$, а $\operatorname{Hom}((Y,f),(Y'f')) = \{\, \phi : Y \to Y' \mid \phi\circ f = f' \,\}$. Докажите, что для любой группы G, если алгебра инвариантов A_X^G конечно порождена, то категорный фактор Y существует и $A_Y = A_X^G$.

3. Найдите категорный фактор
a) $\mathbb{A}^n/\!/\mathsf{k}^*$, где $z(x_1,\ldots,x_n) = (zx_1,\ldots,zx_n)$;
b) $\mathbb{A}^2/\!/\mathsf{k}^*$, где $z(x,y) = (z^a x, z^b y)$, $a,b \in \mathbb{Z}$.

4. Докажите, что элементарные симметрические многочлены порождают $\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ над $\mathbb{Z}$.

5. Докажите, что симметрические многочлены Ньютона $t_k = x_1^k + \cdots + x_n^k$
a) алгебраически независимы и порождают $\mathsf{k}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ над k, если $\operatorname{char}\mathsf{k} > n$;
b) не порождают $\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ над $\mathbb{Z}$.

6. Многочлен $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется кососимметрическим, если $f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)f(x_1,\ldots,x_n)$ для всех перестановок $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Докажите, что
a) кососимметрические многочлены являются модулем над $\mathsf{k}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$;
b) это свободный модуль ранга 1 с образующей $\delta(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$.

7. Пусть $f(x) = a_0\prod_{i=1}^n (x-\alpha_i)$. Докажите, что
a) результант $R(f,f')$ делится на $\delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$;
b) частное $R(f,f')/\delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ является кососимметрическим многочленом от $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$;
c) $R(f,f')$ делится на $\delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)^2$;
d) $R(f,f') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0 D(f)$.