Задачи по алгебре к 03 ноября 2003 г.

1. Пусть D — тело. Введем новое умножение на D формулой $x \star y = y \cdot x$. Докажите, что $(D, +, \star)$ — тело (оно обозначается D^{op}).

2. Пусть D — тело и L — одномерный левый D-модуль. Докажите, что $\mathrm{End}_D(L) = D^{\mathrm{op}}$, $\mathrm{End}_{D^{\mathrm{op}}}(L) = D$.

3. Докажите теорему Жордана–Гельдера для модулей над некоммутативными кольцами.

4. Докажите, что если M — прямая сумма конечного числа простых модулей, то количество простых слагаемых, изоморфных данному простому модулю не зависит от выбора разложения.

5. Пусть M — полупростой A-модуль, $B = \mathrm{End}_A(M)$, $f \in \mathrm{End}_B(M)$. Докажите, что для любого $x \in M$
a) существует проектор $\pi : M \to Ax$, коммутирующий с действием A;
b) $f(x) = \pi(f(x))$;
c) найдется $a \in A$, так что $f(x) = ax$;
d) для любых $x_1, \ldots, x_n \in M$ найдется $a \in A$, так что $f(x_i) = ax_i$ (Указание: рассмотрите $f^{\oplus n} \in \mathrm{End}_B(M^{\oplus n})$).

6. Докажите, что если $A \subset \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathsf{k})$ — подалгебра, такая что k^n — простой A-модуль, и k — алгебраически замкнуто, то $A = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathsf{k})$.

7. Докажите, что над полупростым кольцом существует только конечное множество классов изоморфизма простых модулей.

8. Докажите, что артинова алгебра с нулевым радикалом Джекобсона полупроста.

9. Докажите, что конечномерная коммутативная алгебра без нильпотентов полупроста.