Задачи к экзамену по математическому анализу.

Числа.

Доказать иррациональность следующих чисел:

1. $\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

2. $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$.

3. $\log_2 3$.

4. e.

5. Докажите, что число $\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}$ алгебраическое.

6. Докажите, что число $\sin 5^\circ$ иррациональное и алгебраическое.

7. Вычислите с тремя верными знаками после запятой $e^{\sqrt{2}}$.

8. Вычислите с тремя верными знаками после запятой $\log_{10} 3$.

9. Вычислите с тремя верными знаками после запятой $\sqrt[5]{33}$.

10. Докажите, что не существует автоморфизма поля действительных чисел, отличного от тождественного. (Автоморфизмом поля называется взаимно-однозначное отображение поля на себя, сохраняющее все алгебраические операции - сложение, вычитание, умножение и деление).

Множества.

1. Найти все предельные точки множества $\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m^2},\ n,m\in\mathbb{N}\right\}$.

2. Конечна ли сумма всех элементов множества $\left\{\frac{1}{n^2+m^2},\ n,m\in\mathbb{N}\right\}$?

3. Можно ли представить интервал $(0,1)$ в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых множеств ?

4. Расстояние между двумя замкнутыми подмножествами прямой равно нулю. Обязательно ли они имеют общую точку ?

5. Приведите пример замкнутого подмножества отрезка $[0,1]$, имеющего мощность континуума и не содержащего ни одной рациональной точки.

6. На плоскости дано непустое замкнутое множество A и точка $a \notin A$. Докажите, что существует точка $x \in A$ такая, что $\inf\limits_{y \in A} \|a - y\| = \|a - x\|$. **7.** Рассмотрим множество чисел, в десятичной записи которых нет ни одной девятки. Является ли это множество открытым ? Замкнутым ?

8. Докажите, что квадрат равномощен отрезку.

9. Приведите пример множества мощности большей, чем континуум.

10. Постройте взаимно-однозначное отображение множества $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (плоскость без одной точки) на всю плоскость $\mathbb{R}^2$.

Последовательности и ряды.

Найдите все предельные точки последовательности

1. $a_k = \operatorname{tg} k$.

2. $a_{k+1} = 3 - \frac{2}{a_k}$, $a_1 \geq 1$ (найти все предельные точки в зависимости от a_1).

3. $a_k = \sum_{n=1}^{k} (-1)^{[\log_2 n]}$, $[x]$ - целая часть числа x. **4.** $a_{k+1} = \frac{1}{4 - 3a_k}$, $a_1 = 2003$.

5. $a_{k+1} = \frac{2}{2^{a_k}}$, $a_1 = 2003$.

Исследовать ряды на сходимость (условную и абсолютную) **6.** $a_k = 2^{k^2}/(k!)^2$.

7. $a_k = (-1)^{[k\alpha]}\frac{1}{k}$, α - рациональное число, $[x]$ - целая часть числа x.

8. $a_k = (-1)^k \frac{1}{k \ln k}$.

9. $a_k = \left(\frac{k-2}{k+1}\right)^{k \ln k}$.

10. $a_k = \ln\left(1 + \frac{(-1)^k}{k}\right)$.

Пределы.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}+\sqrt[4]{x}-3}{2-\sqrt{3x+1}}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-1}{x+7-4\sqrt{x+3}}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x}+2\right)^{10}-10x^3}{\left(\sqrt{x}+1\right)^7+2x^3}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+x^3-1}-\sqrt[4]{x^4-x^3+1}\right)^2$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x}-1)^{20}-x^{10}+20x^9\sqrt{x}+1}{x^8-4}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}x^3\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\sin\left(\frac{1}{x+1}\right)\frac{1}{x^2+1}\right)$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos x)^{\sin x}-(\sin x)^{\cos x}-1}{x^3+2\ln x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg} x}{\arcsin x-\operatorname{arctg} x}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2+(n-1)^2}\right)$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{2n}\frac{\ln^2(n/k)}{k}$.

Производные.

В каждой точке вычислить односторонние производные:

1. $\arccos(\cos x)$.

2. $\arcsin(|x+1|-|x|)$.

3. $|\cos x|^{\sin x}$.

Вычислить производные следующих функций: **4.** $\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)\right)^x$.

5.

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}, & x\neq\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ 0, & x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Вычислить производные порядка n:

6. $e^{-x^2/2}$.

7. $\frac{x^2+5}{\sqrt[4]{x+1}}$.

8. $\cos^3 2x\,\sin^2 3x$.

Найти полный дифференциал функции нескольких переменных:

9. $f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c.$

10. $f(x,y) = e^{xy}\sqrt{x^2+y^2}.$

Функции.

1. Существует ли функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, не равная тождественной константе и такая, что $|f(x) - f(y)| \le \frac{1}{2}|\sin(x-y)|$ для любых x, y ?

2. Существует ли функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, не равная тождественной константе и такая, что $|f(x) - f(y)| \le |x-y|^{1,1}$ для любых x, y ?

3. Функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[0,1]$, причем $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Докажите, что существуют точки $a, b \in (0,1)$, $a \ne b$ такие, что $f'(a)f'(b) = 1$.

4. Приведите пример функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, дифференцируемой в точке $x = 0$ и разрывной в каждой точке, кроме $x = 0$.

5. Приведите пример функции $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, дифференцируемой в каждой точке интервала $(-1,1)$, производная которой разрывна в точке 0.

6. Приведите пример бесконечно дифференцируемой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, у которой ряд Тейлора в нуле $\left(\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right)$ сходится при любом $x \in \mathbb{R}$, но $\tilde{f}(x) \ne f(x)$ при всех $x \ne 0$.

7. Приведите пример бесконечно дифференцируемой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такой, что $f(x) = 0$ при всех $x \le 0$ и $f(x) = 1$ при всех $x \ge 1$.

8. Найдите все непрерывно дифференцируемые функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяющие тождеству $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy,\ x, y \in \mathbb{R}$.

9. Приведите пример функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, которая дифференцируема в точке $(0,0)$ по любому направлению

(т.е., функция $F_{ab}(t) = f(at, bt)$ дифференцируема в точке $t = 0$ при любых $(a,b) \ne (0,0)$), но которая разрывна в этой точке.

10. Приведите пример функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, которая имеет обе частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ в точке $(0,0)$, но которая, тем не менее, не дифференцируема в этой точке.

Исследование функций, графики.

1. При каких a графики функций $y = x^a$ и $y = \ln x$ имеют ровно одну общую точку ?

2. При каких положительных a неравенство $a^x \geq ax$ справедливо при всех $x > 0$?

3. Нарисовать график функции $y(x)$, удовлетворяющей условиям $y'(x) = 1 + \sin^2 y(x),\ \ y(0) = 0$.

4. Среди прямых круговых конусов данного объема найти конус с наименьшей площадью поверхностью.

5. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x - x\cos x + \frac{x^2}{4}$. Сколько существует точек на прямой, в которых это наименьшее значение достигается ?

6. Нарисовать график функции $y(x) = \frac{1}{\pi - 2\arcsin(\sin x)}$.

7. Нарисовать график функции $y(x) = \max\limits_{t\in[0,x]}(t^3 - 3t) - \min\limits_{t\in[0,x]}(t^3 - 3t)$.

8. Нарисовать кривую, заданную параметрически $x(t) = \frac{\ln t}{t^2}$, $y(t) = t^2 \ln t$.

9. Про дифференцируемую функцию f известно, что $f(0) = f(1) = 0$ и $|f'(x)| \leq 2$ для всех $x \in [0, 1]$. Какие значения может принимать $f\left(\frac{1}{2}\right)$?

10. Дано положительное число a. Известно, что существует дважды дифференцируемая функция f на отрезке $[0, a]$ такая, что $f(0) = f'(0) = f'(a) = 0,\ \ f(1) = 1$ и $\int\limits_0^a |f''(x)|\,dx \leq 1$. Найдите inf таких чисел a.

Первообразные.

Найти первообразные следующих функций:

1. $\cos(\sqrt{x})$.

2. $x^3 e^{-x^2}$.

3. $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

4. $\cos^2 x\ \sin 5x$.

5. $\frac{1}{\sin^3 x}$.

6. $\frac{x^3+3x}{x^4+1}$.

7. $\sqrt{1+\sin 3x}$.

8. $\frac{x}{\sqrt[5]{x^2+4x+4}}$.

9. $\operatorname{tg}^3 x$.

10. $\sqrt[3]{x}\, 3^{\sqrt[3]{x}}$.

Интегрирование.

1. $\int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}} + \frac{1}{\sqrt{1+\sin x}}\right) dx$. **2.** $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x^5-5x^3+3}{\cos^2 x}\, dx$.

3. $\int\limits_0^{2\pi} \sin(x+\sin x)\, dx$.

4. $\int\limits_0^{6\pi} \arccos(\cos 2x)\, dx$.

5. $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\sin x}\, dx + \int\limits_0^1 \arcsin(x^3)\, dx$.

6. Доказать, что при $x > 0$ $\left|\int\limits_x^{x+1} \sin x^2\, dx\right| \leq 1$.

7. Вычислить $\int\limits_{-1}^1 \left(\cos(x^3) + \sin(x^3)\right)^2 dx$.

8. Дан равносторонний треугольник со стороной 1. Найти площадь фигуры, состоящей из тех точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух ближайших вершин треугольника не превосходит 2.

9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\, dx$ с точностью до $0,01$. **10.** На плоскости дан отрезок длины 1. Найти площадь фигуры, состоящей из тех точек плоскости, произведение расстояний от которых до концов отрезка не превосходит 2.

Отображения.

Какие из следующих отображений пространства $C[0,1]$ являются сжимающими на единичном шаре этого пространства:

1. $y(x) \to \left(x - \frac{1}{3}\right) y(x)$;

2. $y(x) \to xy(x)$;

3. $y(x) \to y^2(x) - \frac{1}{2}$;

4. $y(x) \to y(0)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;

5. $y(x) \to \frac{1}{2}\big(y(0) + y(1)\big)\cos^2 x$;

При каких значениях параметра a отображение $F : C[0,1] \to C[0,1]$ переводит единичный шар пространства $C[0,1]$ в себя (т.е. из $||y|| \le 1$ следует, что $||Fy|| \le 1$)? При каких значениях a оно является сжимающим на единичном шаре ?

6. $[Fy](x) = a\int\limits_0^x \left(y^2(t) + t^2\right) dt$;

7. $[Fy](x) = a\sin\big(y(x)\big)$.

8. Приведите пример сжимающего отображения из

единичного шара пространства $C[0,1]$ в себя, образ которого содержит более одного элемента и состоит из бесконечно-дифференцируемых функций.

9. Существует ли сжимающее отображение из открытого единичного шара $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ в себя, не имеющее ни одной неподвижной точки ?

10. Существует ли непрерывное взаимно-однозначное отображение интервала $(0,1)$ в себя, не имеющее ни одной неподвижной точки ?