Анализ-1. **2.10.03**

1. "Запишите кванторами" функция f является непрерывной и не является равномерно непрерывной на множестве $E \subset \mathbb{R}$. Приведите соответствующий пример.

2. Может ли функция быть непрерывной только в одной точке прямой?

3. Докажите, что на любом некомпактном $E \subset \mathbb{R}$ найдётся непрерывная и неограниченная функция.

4. Пусть последовательность функций $f_k \in C[0;1], k \in \mathbb{N}$ поточечно сходится к функции f. Верно ли, что f будет непрерывна на $[0;1]$?

5. Может ли множество нулей непрерывной функции $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ быть открытым ? Верно ли, что любое замкнутое множество $E \subset \mathbb{R}$ может быть множеством нулей непрерывной функции ?

6. Любое ли подмножество $E \subset [0;1]$ может быть множеством точек непрерывности некоторой функции $f : [0;1] \to \mathbb{R}$?

7. Пусть задано счетное множество $E \subset \mathbb{R}$. Верно ли, что найдётся монотонная функция, множество точек разрыва которой совпадает с E ?

8. Пусть $D(x) = 1$ при $x \in \mathbb{Q}$ и $D(x) = 0$ при $x \notin \mathbb{Q}$; а $R(x) = \frac{1}{n}$ при $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ и $R(x) = 0$ иначе (дробь $\frac{m}{n}$ предполагается несократимой; обе функции определены на $[0;1]$)

а) найти множество точек непрерывности функций D и R

б) можно ли получить эти функции поточечным предельным переходом из непрерывных функций ?

9. Пусть A и B – два выпуклых компактных множества в $\mathbb{R}^2$ с пустым пересечением. Докажите, что найдётся прямая m, относительно которой A и B лежат в разных открытых полуплоскостях.

10. Пусть A – компакт в $\mathbb{R}^2$, а $f : A \to A$ – сюръективное отображение, которое не уменьшает расстояния между точками т.е. $\forall x, y \in A \; |f(x) - f(y)| \geq |x - y|$. Докажите, что f сохраняет расстояния.

11. Существует ли последовательность функций $f_k \in C[0;1], k \in \mathbb{N}$ такая, что $f_k(x) \to \infty$ титтк $x \in \mathbb{Q}$?

12. Пусть $p(x, y)$ – полином и $\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} p(x, y) = 0$. Верно ли, что у полинома есть нуль?