Анализ-1. **9.10.03**

0. Существует ли функция, которая не является производной ?

1. Существует ли дифференцируемая на всей прямой функция, производная которой не является ограниченной на $[0;1]$?

2. Существует ли функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая дифференцируема в точке 1 и разрывна в любой другой точке прямой ?

3. а) Действительные функции f, g определены и дифференцируемы на всей прямой и $g'(x) \neq 0$. Тогда для любых $a < b$ найдётся точка $x \in [a, b]$ такая, что $\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
б) Пусть f непрерывна на $[0;1]$ и дифференцируема на $(0;1)$. Доказать, что если $f(0) = f(1) = 0$, то $f(t) = f'(t)$ в некоторой точке $t \in (0;1)$.

4. Сравните два числа π^e и e^π.

5. Найти все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие , что для любых $x \neq y$ справедливо неравенство $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$.

6. Сколько может быть различных равнобедренных треугольников с заданными боковой стороной и радиусом вписанной окружности ?

7. Является ли периодической функция $f(x) = \sin x + \sin(\sqrt{2003}x)$?

8. Привести пример функции $f \in C^{10}(\mathbb{R})$ такой, что $f(x) = 0$ при $x \leq 0$ и $f(x) = 1$ при $x \geq 1$.

9. В каких точках дифференцируема функция Римана $R(x) = \frac{1}{n}$ при $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ и $R(x) = 0$ в противном случае (дробь $\frac{m}{n}$ предполагается несократимой; обе функции определены на $[0;1]$) ?

10. Пусть $f : (0;1) \to \mathbb{R}$ – непрерывная, монотонная функция. Докажите, что она дифференцируема хотя бы в одной точке интервала. Верно ли это если отбросить предположение о непрерывности f ?