Анализ-1. **21.10.03**

1. Существует ли функция $f \not\equiv 0$ бесконечно дифференцируемая на всей прямой и такая, что $f^k(0) = 0, 0 \le k < \infty$?

2. Докажите, что если $f \in D^2(\mathbb{R})$, то для любых $a \in \mathbb{R}, h > 0$ найдётся точка $x \in (a-h, a+h)$:

$$\frac{f(a-h) + f(a+h) - 2f(a)}{h^2} = f''(x).$$

Обобщите это утверждение на "старшие производные".

3. Существует ли функция f, для которой последовательность $a_k = f^{(k)}(0), k \in \mathbb{N}$.
a) состоит из одних единиц;
b) состоит из нулей и единиц;
c) всюду плотна на отрезке $[0,1]$?

4. Найдите функцию $f(x) \in D^1(0;\infty)$ такую, что длина отрезка касательной проведённой к графику из произвольной точки $(0,y), y > 0$ будет равна 1.

5. Для измерения глубины океанской впадины пускают мощный радиосигнал под углом 60^0 к поверхности воды. Найти до какой максимальной глубины дойдёт радиосигнал, если коэффициент преломления на глубине h равен $1 + 10^{-3}h$.

6. Вычислите интегралы: a) $\int x^3 e^{-x} dx$;
b) $\int \cos x e^{|\sin x|} dx$;
c) $\int_0^\pi \ln \sin x dx$;
d) $\int_0^\pi (x - \frac{\pi}{2})^3 \sin(\cos^2 x) dx$;
e) $\int_{\pi/2}^\pi (\frac{\sin^2 x}{x} + \sin 2x \ln x) dx$.

7. Вычислить пределы при $n \to \infty$
a) $\frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n k \cos(k/n)$;
b) $\sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k}$;
c) $\frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}$

8. Найти площадь плоской фигуры заданной неравенством $(x^3 - \arcsin(y))(y^3 + \arcsin(x)) \le 0$.