Анализ-1. **23.10.03**

1. Построить монотонную функцию с разрывной в точке 0 производной.

2. Докажите, что уравнение $x^5 - x + 1 = 0$ имеет решения. Сколько их ?

3. а) Вычислить производные всех порядков в 0 у функции $\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$.
б) Разложить функцию $e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)$ в ряд по x.

4. Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R}), f^{(k)}(0) = 0, k \geq 0$ и $f^{(k)}(x) \geq 0$ при $x > 0$. Докажите, что $f(x) \equiv 0$ при $x \geq 0$.

5. Пусть $f \in D^3(\mathbb{R})$ и известно, что $f, f', f'', f''' > 0$ во всех точках. Докажите, что найдется $A > 0$ такое, что $f(x) > Ax^2$ при $x > 0$.

6. Докажите, что у полинома $p_n(x) = \sum_{j=0}^{2n} \frac{x^j}{j!}$ нет вещественных нулей.

7. а) Нарисована фигура (выпуклый компакт) на плоскости. Докажите, что её можно рассечь прямой на 2 равновеликие части.
б) Доказать, что 2 фигуры на плоскости можно одновременно рассечь прямой пополам.

8. Докажите, что любое непрерывное отображение круга (квадрата) в себя имеет неподвижную точку.

9. Пусть отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таково, что для любых $x, y \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $|f(x) - f(y)| < |x - y|$. Верно ли, что у f есть неподвижная точка ? Сколько может быть неподвижных точек у подобного отображения ?

10. Пусть некоторая последовательность непрерывных на $[0; 1]$ функций является ограниченной в каждой точке. Верно ли, что найдется подотрезок, на котором все функции ограничены одной и той же постоянной ?

11. Пусть $f \in D(\mathbb{R})$. Докажите, что найдётся точка непрерывности производной. Может ли множество точек непрерывности производной быть конечным ?

12. Пусть функция $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ и известно, что для любой точки $x \in \mathbb{R}$ найдётся число $k_x \in \mathbb{N} : f^{(k)}(x) = 0, k \geq k_x$. Докажите, что f полином.