Анализ-1. **6.11.03**

В задачах 1-2 $a_n \geq 0$.

1. (Даламбер) Если $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то ряд сходится; если $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то расходится.

2. (Коши) Если $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, то ряд сходится; если $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, то расходится.

3. (Коши) Пусть $a_1 \geq a_2 \geq \dots a_n \geq \dots \geq 0$. Тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ сходятся или же расходятся одновременно.

4. (Раабе) Пусть $a_n \geq 0$ и $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \alpha\frac{E_n}{n}$ и $E_n \to 1$ при $n \to \infty$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha < 1$.

5. (Абель-Дирихле) Пусть последовательность a_n монотонно убывает и стремится к 0, а частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ равномерно ограничены. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится. (Данный признак применим и если $\{b_n\}$ - последовательность векторов).

6. Исследовать на сходимость ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

a) $a_n = b^n$

b) $a_n = \frac{1}{n^p}$

c) $a_n = \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$

d) $a_n = \frac{1}{n \log_b^p n}, b > 1$

e) $a_n = \frac{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}{\delta(\delta+1)\dots(\delta+n-1)}, \delta = \sqrt{10}, \gamma = \sqrt{7}$

f) $a_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^x}\right)$

g) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$

h) $a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}$

i) $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} \cos nx$

7. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

a) $a_n = \frac{1}{n(n+1)2^n}$

b) $a_n = \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n$

c) $a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n-1)3n}$

d) $a_n = \frac{1}{x_n}, x_1 = b > 1, x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1, n \geq 1$

8. Можно ли расставить знаки перед членами ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ так, чтобы сумма ряда равнялась 0 ?