2. Непрерывность и компактность

2.1. Топологические пространства и непрерывные отображения

Примером топологического пространства может служить $\mathbb{R}$: в $\mathbb{R}$ можно определить систему множеств (которые называются открытыми), обладающую свойствами: a) пустое множество и всё $\mathbb{R}$ открыты, b) объединение любой совокупности открытых множеств и пересечение конечного числа открытых множеств открыты.

Открытое множество на прямой можно определить так: это множество, обладающее свойством с каждой своей точкой ξ содержать интервал $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-\xi| < \varepsilon\}$ при некотором $\varepsilon > 0$ (зависящем от ξ). Пустое множество считается открытым по определению.

Упражнение 2.1. Убедиться, что так определённые множества обладают свойствами a) и b).

Сказанное побуждает дать такое общее

Определение 2.1. Пусть задано множество X и в нём система подмножеств τ, обладающая свойствами: a) пустое множество и всё X принадлежат τ, b) объединение любой совокупности множеств из τ и пересечение конечного числа множеств из τ принадлежат τ. Такая пара (X, τ) называется *топологическим пространством.*

Множества из τ называются при этом *открытыми,* их дополнения — *замкнутыми множествами.*

Пример 2.1. Примером топологического пространства является, как мы уже знаем, вещественная прямая $\mathbb{R}$.

Помимо функций одного переменного, мы будем изучать функции многих переменных или функции на $\mathbb{R}^n$.

Чтобы было удобнее, переменные будут обозначаться единообразно в виде столбцов $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и весь набор будем обозначать одной буквой x. Такие элементы будем называть векторами. Если $x \in \mathbb{R}^n$, то через x^T обозначается строка $(x_1, \ldots, x_n)$. Столбцы можно покоординатно складывать и умножать на вещественные числа: если $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, то $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$, а если $\alpha \in \mathbb{R}$, то $\alpha x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$.

Кроме пространства $\mathbb{R}^n$ векторов-столбцов будем рассматривать пространство $(\mathbb{R}^n)'$ векторов-строк. Векторы из $\mathbb{R}^n$ можно воспринимать, как матрицы из одного столбца и n строк, векторы из $(\mathbb{R}^n)'$ — как матрицы из одной строки и n столбцов.

Если $x \in (\mathbb{R}^n)'$, а $y \in \mathbb{R}^n$, то через $x \cdot y$ обозначают сумму $x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ (это соответствует правилу перемножения матриц). Величину $\sqrt{x^T \cdot x}$ обозначают $|x|$ и называют *модулем* вектора x.

Пример 2.2. Примерами топологических пространств являются пространства $\mathbb{R}^n$ и $(\mathbb{R}^n)'$. Нетрудно доказать, что пространство $\mathbb{R}^n$, в котором множество называется открытым, если вместе с каждой своей точкой ξ оно содержит открый шар $U(\xi, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - \xi| < \varepsilon\}$ с центром в ξ радиуса ε при некотором $\varepsilon > 0$ (зависящем от ξ) становится топологическим пространством.

Упражнение 2.2. Доказать, что открытый шар — открытое множество.

Множество важных для нас в будущем топологических пространств доставляют метрические пространства.

Определение 2.2. *Метрическое пространство* — это множество X, на котором определена функция расстояния, сопоставляющая паре $(x_1, x_2) \in X \times X$ неотрицательное число $d(x_1, x_2)$ (расстояние от x_1 до x_2), равное нулю, если и лишь если $x_1 = x_2$, обладающее свойством симметрии $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$ (для любых x_1 и x_2) и удовлетворяющее неравенству треугольника: $d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$ для любых x_1, x_2, x_3.

Метрическое пространство становится топологическим, если открытые множества в нём определять, как множества, которые вместе с каждой своей точкой ξ содержат *открытый шар* $U(\xi, \varepsilon) = \{x \mid d(x, \xi) < \varepsilon)$ (с центром в ξ радиуса ε при некотором $\varepsilon > 0$, зависящем от ξ).

Пример 2.3. Примерами метрических пространств могут служить прямая $\mathbb{R}$ (с $d(x, y) = |x - y|$) и n-мерные пространства $\mathbb{R}^n$ или $(\mathbb{R}^n)'$ с $d(x, y) = |x - y| = (\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2)^{1/2}$.

Рассмотрение последних примеров ($\mathbb{R}^n$ и $(\mathbb{R}^n)'$) естественно приводит к определению n-мерного *евклидова* пространства векторов-строк $x = (x_1, \ldots, x_n)$, оснащённых *скалярным произведением* $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$. Это пространство будем обозначать $\mathbf{E}^n$. Оно становится метрическим с расстоянием с $d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$.

Основным объектом изучения в этой главе будут непрерывные функции на топологических или метрических пространствах.

Понятие функции или отображения (как и понятие множества) относится к числу изначальных понятий в математике. Если даны два множества X и Y, то отображением из X в Y называется соответствие f, при котором каждому элементу x множества X сотнесено либо пустое множество, либо один элемент $f(x)$ множества Y. При этом пишут: $f : X \to Y$. (Иначе можно сказать, что функция $f : X \to Y$ определяется подмножеством пар (x, y) — иначе — *декартова произведения* $X \times Y$ — при котором каждому $x \in X$ соответствует либо пустое множество, либо одна пара (x, y); совокупность пар $(x, f(x))$ называется *графиком* f.) Отображения из X в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ называют *функционалами*, а если при этом $X = \mathbb{R}^n$, то *функциями*. Подмножество $\mathrm{dom} f \subset X$ тех x, для которых $f(x) \neq \emptyset$, называется *областью определения* f; если $A \subset X$, то $\{y \in Y \mid \exists x \in A : y = f(x)\}$ называется *образом* $A \subset X$ при отображении f (обозначается $f(A)$), а $\{x \in X \mid f(x) \in B\}$ называется *прообразом* $B \subset Y$ (обозначается $f^{-1}(B)$).

Определение 2.3. Пусть (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) — топологические пространства. Отображение $f : X_1 \to X_2$ называется *непрерывным*, если прообраз любого множества из τ_2 принадлежит τ_1 ("прообраз открытого множества открыт"). Функция $f : X \to \mathbb{R}$ (где X — топологическое пространство) называется *полунепрерывной снизу (сверху)*, если её лебеговские множества $\mathcal{L}_\alpha(f) = \{x \mid f(x) \leq \alpha\}$ ($\mathcal{M}_\alpha(f) = \{x \mid f(x) \geq \alpha\}$) замкнуты при любом $\alpha \in \mathbb{R}$.

Упражнение 2.3. Доказать, что функция полунепрерывная и сверху и снизу непрерывна.

Упражнение 2.4. Отображение $f : X_1 \to X_2$ (одного топологического пространства в другое) называется *непрерывным в точке* ξ, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся окрестность V точки ξ такая, что если $x \in V$, то $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$. Докажите, что отображение f непрерывно если и только если оно непрерывно в каждой точке X.

В случае метрического пространства определение непрерывной функции равносильно более привычному — с $\varepsilon - \delta$.

Определение 2.4. Пусть (X, d) — метрическое пространство и f — функция на X. Она называется *непрерывной в точке* $\xi \in X$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что если $d(x, \xi) < \delta$, то $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$. Если f непрерывна в каждой точке множества $A \subset X$, она называется *непрерывной на* A.

Упражнение 2.5. Доказать, что в случае, когда X и Y — метрические пространства и $f : X \to Y$, определения 2.3 и 2.4 непрерывности отображения f совпадают.

Важнейшим метрическим бесконечномерным пространством является пространство $C([a,b])$ непрерывных вещественных функций на отрезке $[a,b]$, где расстояние определяется по формуле:[3]
$d(f,g) = \max_{x\in[a,b]}|f(x) - g(x)|$.

Определение 2.5. Пусть (X,d) — метрическое пространство. Последовательность его элементов $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется *сходящейся*, если существует элемент x такой, что $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$; она называется *фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что если $n, m > N$, то $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.*

Очевидно, что любая сходящаяся последовательность фундаментальна.

Определение 2.6. Метрическое пространство (X,d) называется *полным*, если в нём любая фундаментальная последовательность является сходящейся.

Примером полного метрического пространства является, как это следует из первой главы, прямая $\mathbb{R}$. Из свойств вещественных чисел следует, что пространства $\mathbb{R}^n$ и $(\mathbb{R}^n)'$ (с введенными выше расстояниями на них), являются полными метрическими пространствами.

Имеет место важная

Теорема 2.1 (Вейерштрасса). *Пространство $C([a,b])$ является полным метрическим пространством в равномерной метрике:*
$d(x(\cdot), y(\cdot)) = \max_{t\in[a,b]}|x(t) - y(t)|$

(т. е. фундаментальная последовательность непрерывных функций сходится к непрерывной функции).

Доказательство. При доказательстве, естественно, используется полнота вещественной прямой Пусть $\{f_n(\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$ – фундаментальная последовательность непрерывных функций. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что $d(f_n, f_m) < \varepsilon \quad \forall n, m > N$. Из этого определения вытекает, что для каждого фиксированного x последовательность чисел $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна. Значит, по аксиоме Коши она имеет предел, который обозначим $f(x)$.

Покажем,что $f(\cdot)$ – непрерывна. По $\varepsilon > 0$ найдем такое N, чтобы из $n, m > N$ следовало бы неравенство

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/3, \quad n, m > N, \quad \forall x \in [a,b].$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем, что

$$|f(x) - f_n(x)| \le \varepsilon/3 \quad \forall x \in [a,b]. \qquad (i)$$

Зафиксируем точку $x_0 \in [a,b]$ и покажем, что f непрерывна в x_0. Воспользовавшись непрерывностью f_n, по ε найдем $\delta > 0$ так, чтобы

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| \le \varepsilon/2 \quad |x - x_0| < \delta. \qquad (ii)$$

В итоге получаем:

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \overset{(i),(ii)}{\le} \varepsilon,$$

т. е. f непрерывна в x_0. □

[3]Достижение непрерывной функцией максимума и минимума, доказывается чуть далее.

2.2. Компакты. Свойства непрерывных функций

Определение 2.7. Пусть X — топологическое пространство. Оно называется *компактным* (или *топологическим компактом*), если из любого открытого покрытия X (т. е. покрытия X открытыми множествами) можно извлечь конечное подпокрытие.

Определение 2.8. Пусть (X, d) — полное метрическое пространство. Оно называется *компактным* или *метрическим компактом*, если из любой его последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

Далее мы будем доказывать некоторые свойства непрерывных функций параллельно: для функций одного переменного и для общих метрических и топологических пространств (общие доказательства будут обычно не сложнее).

Теорема 2.2 (Больцано – Вейерштрасса о сходящейся подпоследовательности). *Из любой (бесконечной) последовательности точек на отрезке можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке отрезка.*

Замечание. Здесь можно воспользоваться аксиомой Больцано-Вейерштрасса и полнотой прямой, но мы хотим дать доказательство, прокладывающее путь к общему результату.

Доказательство. Не ограничив себя в общности, считаем, что отрезок это $[0, 1]$. Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — некоторая последовательность. Применим *метод деления пополам* (фактически доказательство повторяет вывод аксиомы Больцано-Вейерштрасса из аксиомы Кантора).

На одном из отрезков $[0, \frac{1}{2}]$ или $[\frac{1}{2}, 1]$ лежит бесконечное число точек последовательности. Выберем его, выберем первый элемент исходной последовательности, который принадлежит выбранному отрезку и далее с выбранным отрезком поступим, как изначально с исходным. И так далее. Получим последовательность вложенных отрезков $\Delta_0 = [0, 1] \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$, длины которых стремятся к нулю и подпоследовательность $x_{n_k} \in \Delta_k$. По аксиоме Кантора существует единственная точка ξ, принадлежащая всем отрезкам. По построению для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $N \in \mathbb{N}$ при котором все отрезки Δ_k при $k \geq N$ будут лежать в интервале $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$, откуда следует, что $|x_{n_k} - \xi| < \varepsilon$ при $k \geq N$, т. е. (по определению предела) $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$. □

Теорема 2.2′ (Обобщённая теорема Больцано – Вейерштрасса о сходящейся подпоследовательности). *Из любой (бесконечной) последовательности точек метрического пространства, являющегося топологическим компактом, можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Множество $B(\xi, r) = \{x \in X \mid d(x, \xi) \leq r$ называется (замкнутым) шаром радиуса r с центром в ξ.

Доказательство обобщённой теоремы проходит по схеме "одномерной". Система открытых шаров $\{U(x, 1)\}_{x\in X}$ — открытое покрытие X. Выберем из него конечное и среди этого конечного числа шаров радиуса единица выберем шар $U(\xi_1, 1)$, содержащий бесконечное число элементов последовательности. Затем возьмём замкнутый шар $B(\xi_1, 1)$ (который обозначим A_1) и точку последовательности x_{n_1}, ему принадлежащую. Покроем теперь X системой открытых шаров $\{U(x, \frac{1}{2})\}_{x\in X}$ половинного радиуса и выберем тот шар $U(\xi_2, \frac{1}{2})$, пересечение которого с A_1 содержит бесконечное число элементов последовательности. Пересечение A_1 с $B(\xi, \frac{1}{2})$ обозначим A_2 и возьмём в A_2 точку x_{n_2}, $n_2 > n_1$ из нашей последовательности. И далее будем поступать аналогично, беря шары на следующем шаге половинного радиуса в сравнении с предыдущим. Легко понять, что последовательность $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ фундаментальна. В силу полноты X она сходится к некоторой точке $\xi \in X$. □

Упражнение 2.6. Доказать, что если (X, d) — метрическое пространство и f — функция, непрерывная в точке x_0, то для любой последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, сходящейся к x_0, последовательность $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к $f(x_0)$ (необходимость в лемме Гейне).

Теорема 2.3 (Вейерштрасса о достижении максимума и минимума). *Непрерывная на отрезке функция ограничена на нём и достигает на нём максимального и минимального значения.*

Доказательство. Докажем сначала, что функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ограничена на $[a,b]$. Если это не так (пусть для определённости f принимает сколь угодно большие положительные значения), то найдётся последовательность точек $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что $f(x_n)$ стремится к бесконечности. По теореме Больцано – Вейерштрасса найдётся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ такая, что $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi \in [a,b]$. Но тогда (по лемме Гейне) $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi)$. Противоречие.

Пусть теперь M — верхняя грань f на отрезке. Тогда найдётся последовательность $\{x'_n\}_{n\to\infty}$ такая, что $f(x'_n)$ стремится к M. По теореме Больцано – Вейерштрасса выберем подпоследовательность $\{x'_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке отрезка. При этом значение f в этой точке (по лемме Гейне) будет равно M. Аналогично доказывается, что и нижняя грань также достигается. $\square$

Предложение 2.4. *Компакты в пространстве $\mathbb{R}^n$ — это ограниченные замкнутые множества.*

Докажем этот результат для прямой. Общий случай аналогичен.

Доказательство. **Лемма 2.5.** *Множество A на прямой замкнуто, если и лишь если оно содержит все свои предельные точки.*

Доказательство леммы. 1) Пусть A замкнуто, т. е. дополнение к A открыто. Если $\widehat{x}$ — предельная точка множества A, то это означает, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдётся точка $x_n \in A \setminus \{\widehat{x}\}$ такая, что $|x_n - \widehat{x}| < \frac{1}{n}$, а это противоречит предположению, что $\mathbb{R} \setminus A$ — открытое множество (если допустить, что $\widehat{x}$ не принадлежит A).

2) Пусть A содержит свои предельные точки и $\widehat{x} \in \mathbb{R} \setminus A$. Тогда невозможно допустить, что в любой близости от $\widehat{x}$ будут точки из A, отличные от $\widehat{x}$, и значит, найдётся число $\varepsilon > 0$ такое, что интервал $(\widehat{x} - \varepsilon, \widehat{x} + \varepsilon) \subset \mathbb{R} \setminus A$, т. е. $\mathbb{R} \setminus A$ открыто, а тогда A замкнуто.

А теперь переходим к доказательству самого предложения.

1) *Ограниченные и замкнутые множества на прямой — компакты.* Для доказательства этого помещаем ограниченное замкнутое множество A в отрезок $[-N, N]$ и применяем далее метод деления пополам. Последовательность вложенных отрезков, пересечения которых с A не может быть покрыто конечным числом открытых множеств, сходится к точке, являющейся предельной для A и значит (по лемме) принадлежащей A. Но тогда совершенно аналогично тому, как это было доказано для отрезка приходим к противоречию.

2) Пусть множество A — компакт. Покроем каждую точку интервалом единичной длины с центром в этой точке и выберем конечное подпокрытие. Тем самым обнаружится, что A ограничено. Если же допустить, что имеется предельная точка ξ множества A, не принадлежащая A, то из открытого покрытия открытыми лучами $U_n = \{x \mid x > \xi + 1/n\}$ и $U'_n = \{x \mid x < \xi - 1/n\}$ нельзя выбрать конечное подпокрытие. $\square$

Теорема 2.3$'$ (Обобщённая теорема Вейерштрасса о компактности). *Если X и Y — топологические пространства, $f : X \to Y$ — непрерывное отображение и A — компакт, тоогда образ $f(A)$ — компакт.*

Доказательство. Покроем $f(A)$ открытыми множествами. Их прообразы — открытое покрытие X. Но X — компакт, значит из этих прообразов можно выбрать конечное подпокрытие $\{V_i\}_{i=1}^N$. Тогда образы этих множеств — конечное подпокрытие первоначального покрытия. $\square$

Следствие (о достижении максимума и минимума). *Непрерывный образ компакта — компакт, т. е. ограниченное замкнутое подмножество $\mathbb{R}$. Оно имеет свои максимальную и минимальную точки (ибо отрезок — ограниченное и замкнутое множество, и следовательно, содержит свою верхнюю и нижнюю грани).* $\square$

Теорема 2.6 (Больцано – Коши о нулевом значении). *Непрерывная на конечном отрезке функция, принимающая на концах отрезка значения разных знаков, принимает на этом отрезке нулевое значение*

Доказательство. Не ограничив себя в общности, считаем $f(a) < 0$. Тогда $f(b) > 0$. Рассмотрим множество $C = \{c \in [a,b] \mid \forall x \in [a,c] : f(x) < 0\}$. C непусто, ибо $a \in C$ и ограничено сверху (числом b). По аксиоме Вейерштрасса существует число $\widehat{x}$, являющееся верхней гранью C. Если допустить, что $f(\widehat{x}) < 0$, то из-за непрерывности f получим, что $\widehat{x}$ не является верхней гранью C (продумайте это). Аналогично доказывается, что $f(\widehat{x})$ не может быть положительным числом. Значит, $f(\widehat{x}) = 0$. □

Следствие (о промежуточных значениях). *Функция $f \in C([a,b])$ принимает все значения в отрезке $[f(a), f(b)]$.*

Действительно, если $f(a) < c < f(b)$, надо рассмотреть функцию $g(x) = f(x) - c$ и применить к ней теорему 2.3.

Упражнение 2.7. Мы доказали теорему Больцано – Коши о нулевом значении, основываясь на аксиоме Вейерштрасса. Докажите теорему 2.3 методом деления пополам.

Замечание. Свойство отрезка, которое было использовано в теореме Больцано – Коши — это *связность*. Топологическое пространство называется связным, если оно одновременно если его нельзя представить, как объединение непустых непересекающихся открыто-замкнутых подмножеств..

Упражнение 2.8. Докажите, что отрезок прямой связен.

Упражнение 2.9. Докажите, что непрерывная функция на связном пространстве принимает промежуточные значения (обобщённая теорема Больцано – Вейерштрасса).

2.3. Приложение: элементарные функции и простейшие кривые

1. *Линейные и аффинные функции. Прямая пропорциональность. Арифметическая прогрессия.*

Простейшие из функций — *константы*: $y(x) = \text{const},\ x \in \mathbb{R}$ или $a_n \equiv a,\ n \in \mathbb{N}$.

Следующие по сложности — *линейные функции*:

$$y = kx \text{ или } f(x) = kx. \tag{1}$$

и последовательности вида $a_n = kn$. Число k в (1) называется *коэффициентом пропорциональности*. Линейное свойство выражается равенством:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2). \tag{2}$$

Функции $y = kx + b$ называются *аффинными*. Графиками этих функций на плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ являются прямые не параллельные оси ординат. Общее уравнение прямой на плоскости (x, y) такое: $ax + by = c$.

2. *Окружность.* Геометрически окружность определяется как множество точек (в школе, говорится “геометрическое место точек”) евклидовой плоскости, удаленных от данной точки (от ее центра) на фиксированное расстояние. Для центра, расположенного в начале координат, окружность радиуса r задается уравнением $x^2 + y^2 = r^2$ или в параметрической форме: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ \varphi \in [0, 2\pi]$.

3. *Парабола.* Парабола, наряду с окружностью, а также эллипсом и гиперболой, о которых речь впереди, — одно из конических сечений, теория которых была построена Аполлонием (~ 260 – 190 до н.э.). Парабола получается из сечения прямого кругового конуса плоскостью, параллельной одной из образующих, не проходящих через вершину.

Парабола геометрически описывается, как множество точек на плоскости, равноудаленных от некоторой точки плоскости (фокуса параболы) и прямой (называемой директрисой).

Графики функций, задающихся уравнением с квадратным трехчленом:

$$y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$

являются параболами. Ими описывается путь при равноускоренном движении:

$$\ddot{x} = a \Longrightarrow x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$$

(здесь a — ускорение, v_0 — начальная скорость, x_0 — начальное положение точки). В частности, при вертикальном падении тел $x(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + x_0$, здесь $g \approx 9.8$м/сек^2 — ускорение силы тяжести. Этот закон был описан Галилеем в 1638 году в его знаменитой книге "Беседы".

4. *Эллипс* — одно из конических сечений. Получается сечением прямого кругового конуса, пересекающим все образующие конуса. Нетрудно вывести из этого определения, что эллипс — это множество точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек (называемых фокусами) постоянна. Пусть фокусы F_1 и F_2 расположены на оси Ox по разные стороны симметрично относительно начала координат, а ось Oy направлена перпендикулярно оси Ox.

Задача 2.1 (на доказательство). *Докажите, что уравнение эллипса в системе координат рисунка имеет вид:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

Соотношение (4) называется *каноническим уравнением* эллипса.

5. *Гипербола.* Также одно из конических сечений. Получается сечением прямого кругового конуса, пересекающим часть образующих обеих пол конуса. Имеет две ветви. Определяется следующим свойством: разность расстояний от точки гиперболы до двух точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Задача 2.2 (на доказательство). *Докажите, что уравнение гиперболы (в тех же осях, что и в случае эллипса) имеет вид:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{5}$$

Гипербола (5) с $a = b = r$ называется *равнобочной.* Ее параметрическое представление задают формулы:

$$x = r \operatorname{ch} t,\ y = r \operatorname{sh} t,\quad \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2},\ \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

Другая форма уравнения, задающего равнобочную гиперболу (но повёрнутую на 45°), такова: $y = \frac{k}{x}$ Это уравнение выражает *обратную пропорциональность.*

Вот простейшие функции n переменных:

линейная: $f(x) = a \cdot x = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ или $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ (она удовлетворяет двум соотношениям: $f(x + x') = f(x) + f(x'),\ f(\alpha x) = \alpha f(x)\ \forall x, x' \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}$);

аффинная: $g(x) = a \cdot x + b = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + b$;

квадратичная: $Q(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2(b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n) + c$. (Эту функцию можно коротко записать, используя матричную символику: $Q(x) = (Ax)^T \cdot x + 2b \cdot x + c$, где $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.)

Но вернёмся к функциям одного переменного.

6. *Полиномы.* Так называют функции вида

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Полиномы вычисляются с помощью основных арифметических операций без деления. В силу этого они являются одним из основных аппаратов *приближения* функций.

Нам придется изучать *полиномиальные последовательности*, например, $\{n^k\}_{n\in\mathbb{N}}$.

7. *Рациональные функции.* Так называются функции вида

$$y = p(x)/q(x),$$

где $p(\cdot)$ и $q(\cdot)$ — полиномы.

Частным случаем рациональной функции является обратная пропорциональность, о которой говорилось. Простейшим примером рациональных функций являются *дробно-линейные функции*: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Рациональные функции вычисляются с помощью всех арифметических операций.

Областью определения полиномов (а аффинные и квадратичные функции являются полиномиальными) является вся прямая $\mathbb{R}$. Область определения рациональной функции $p(\cdot)/q(\cdot)$ (если числитель и знаменатель не имеют общих вещественных корней) есть $\mathbb{R}$ без нулей знаменателя.

8. *Радикалы.* Так называются функции $f(x) = \sqrt[n]{x}$. При чётном n областью определения радикалов является полупрямая $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, при нечётном n — вся прямая. Значение $\sqrt[n]{c}$ можно для положительного c, не являющегося n-й степенью натурального числа, определить с помощью сечения также, как в первом разделе определялось число $\sqrt{2}$, с помощью сечения Дедекинда $A|B$ в области рациональных чисел, когда $A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a > 0,\ a^n < c\} \cup \{a \mid a \leq 0\}$, а $B = \{b \in \mathbb{Q} \mid b > 0,\ b^n > c\}$.

Приведем три важнейших (для математики и естествознания) класса функций. Здесь мы ограничимся лишь первым знакомством. После освоения начал анализа мы вернемся к их изучению.

9. *Экспоненты или показательные функции.*

В школе мы узнали кое-что о показательных функциях $y = a^x, a > 0, a \neq 1$. Сейчас, после построения вещественной прямой, можно строго определить, что такое экспонента a^x. Вот набросок пути, на котором возможно строгое определение. Для натуральных $x = n$ число a^n — это не что иное, как $a \cdot a \cdots a$ (n раз). Для дробных $x = p/q$, $a^{p/q} = (a^p)^{1/q}$, а извлекать корни мы только что научились. А дальше надо поступить так, как при определении корня k-той степени, например, построить дедекиндово сечение.

Отметим, что областью определения показательной функции является вся прямая $\mathbb{R}$.

Наиболее "знаменитой" среди показательных функций является функция $y = e^x$; она удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = y$ с условием $y(0) = 1$. Через эту функцию определяются *гиперболический синус* и *гиперболический косинус:*

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Отметим еще функциональное уравнение для показательных функций: $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$.

Дискретным аналогом показательной функции является *геометрическая прогрессия*:

$$s_n = s_1 q^{n-1},\ n \in \mathbb{N}.$$

Здесь каждый член (начиная со второго и если $q > 0$) равен среднему геометрическому двух соседних (*среднее геометрическое* чисел a и b это $\sqrt{ab}$.) Число q называется *знаменателем* прогрессии.

10. *Логарифмические функции.* Так называются функции, обратные к показательным. Представление об этих функциях читатель имеет из школы. Для $x > 0$ число $y = \log_a x$ — это такое число, что $a^y = x$, $a \neq 1$. Число a называется *основанием* логарифмов.

Читатель может для упражнения обосновать понятие логарифмической функции, исходя из теории действительного числа. Со временем нам еще предстоит придать понятию логарифма точный смысл (и при том дважды): когда выразим логарифмы через интегралы и когда выразим их через ряды.

Область определения логарифмов — положительные действительные числа. Область определения логарифмической функции — положительная вещественная полуось: в нуле логарифмическая функция принимает бесконечное значение ($+\infty$ при $a < 1$ и $-\infty$ при $a > 1$), отрицательные числа логарифмов не имеют.

Логарифмы удовлетворяют уравнению $f(xy) = f(x) + f(y)$. Это позволяет в вычислениях заменять умножение сложением, т. е. более сложную операцию более простой.

11. *Тригонометрические функции.*

Волновые или колебательные движения — едва ли не самые распространенные в природе. При их описании возникают периодические функции. Периодом функции f называется минимальное из положительных чисел T таких, что $f(x+T) = f(x)\ \forall x$. Простейшие из периодических функций — уже встречавшиеся нам в этом параграфе синус и косинус. Напомним их "школьное" определение. На декартовой плоскости Oxy начертим единичную окружность $x^2 + y^2 = 1$. От точки $(1, 0)$ этой окружности отложим дугу длины α. Получим точку M_α. Ее абсцисса — $\cos\alpha$, ордината — $\sin\alpha$.

Период этих функций равен 2π.

12. *Обратные тригонометрические и гиперболические функции.* Функция $x \to \sin x$ монотонна при $-\pi/2 \le x \le \pi/2$. Обратная функция обозначается $\arcsin\cdot$; функция $x \to \cos x$ монотонна при $0 \le x \le \pi$. Обратная функция обозначается $\arccos\cdot$.

Аналогично определяются $\mathrm{arctg}\cdot$, $\mathrm{arcctg}\cdot$, $\mathrm{arcsh}\cdot$, $\mathrm{arcch}\cdot$, $\mathrm{arcth}\cdot$, $\mathrm{arccth}\cdot$.