4. Принципы и методы доказательства теорем существования

Перед формулировкой общих теорем будем напоминать различные определения, вообще говоря, нам уже известные.

I. Принцип компактности: *при поиске глобальных экстремумов разумно опираться на компактность.*

Напоминание. Пусть (X, τ) – топологическое пространство. Оно называется *компактным* или *компактом*, если из любого семейства открытых множеств, покрывающих X можно извлечь конечное подсемейство, также покрывающее X. Функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется *полунепрерывной снизу*, если её лебеговские множества $\mathcal{L}_\alpha(f) = \{x \mid f(x) \leq \alpha\}$ замкнуты при любом $\alpha \in \mathbb{R}$.

Теорема (Вейерштрасса – Лебега – Бэра). *Полунепрерывная снизу вещественная функция на компакте достигает своего минимального значения.*

II. Принцип "разреженности": *счётным множеством разреженных (нигде не плотных) множеств нельзя покрыть полного метрического пространства.*

Напоминание. Пусть (X, d) – метрическое пространство. Последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ называется *фундаментальной*, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что $d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m > N$. Эта последовательность называется *сходящейся к* x, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что $d(x_n, x) < \varepsilon \ \forall n \geq N$. Если в метрическом пространстве любая фундаментальная последовательность сходится, оно называется *полным.*

Определение 4.1. Множество A в метрическом пространстве (X, d) называется *нигде не плотным* (выше мы назвали его разреженным), если в любом открытом подмножестве X найдется открытый шар, не пересекающийся с A.

Теорема (Бэра). *Полное метрическое пространство не может быть представлено в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств.*

III. Принцип сжимающих отображений: *сжимаемость в полном метрическом пространстве влечёт существование неподвижной точки.*

Определение 4.2. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Отображение $F : X \to X$ называется *сжимающим*, если существует число $\theta,\ 0 < \theta < 1$ такое, что $d(F(x), F(x')) \leq \theta d(x, x')\ \forall x,\ x' \in X$.

Теорема (Качиополли–Банаха). *Сжимающее отображение полного метрического пространства имеет единственную неподвижную точку.*

IV. Топологические принципы. Среди множества результатов о существовании, где используется топология, выделим лишь один:

Теорема (Брауэра). *Непрерывное отображение n–мерного шара в себя имеет неподвижную точку.*

V. Принципы монотонности.

Термин "монотонность" имеет несколько значений, совпадающих в одномерном случае. Одно из значений основано на понятии *порядка*, другое связано с производными выпуклых функций.

Определение 4.3. Отображение $F : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ [4] называют *монотонным (строго монотонным)*, если $\langle F(x_2) - F(x_1), x_2 - x_1 \rangle \geq 0 (\geq \alpha |x_2 - x_1|^2)$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ [5] и *коэрцитивным*, если $\lim_{x\to\infty} |F(x)| = \infty$.

Теорема (принцип Минти – Браудера). *Строго монотонное, непрерывное, коэрцитивное отображение n-мерного евклидова пространства в себя является накрывающим (т. е. уравнение $F(x) = y$ разрешимо для любого y).*

Большинство принципов, о которых говорилось выше, конструктивны: на них базируются алгоритмы, ведущие к нахождению искомого объекта. Но приведём один "неконструктивный" принцип существования, основанный на порядковых понятиях. Элемент a' линейно упорядоченного множества $(A, \leq)$ называется верхней гранью этого множества, если $a \leq a'$ $\forall a \in A$. Элемент ξ называется максимальным в упорядоченном множестве $(X, \leq)$, если $x \leq \xi$ для всех элементов x, сравнимых с ξ.

Теорема (принцип (или лемма) Цорна). *Частично упорядоченное множество, у которого любое линейно упорядоченное множество имеет верхнюю грань, имеет максимальный элемент.*

Этот результат равносилен следующей "аксиоме существования", называемая *аксиомой выбора*:*если $F : X \to Y$ — многозначное отображение из множества X во множество Y*[6]*, то существует однозначная функция $f : X \to Y$, такая, что $f(x) \in F(x)$ $\forall x$.*

4.1. Доказательства

I. *Доказательство принципа компактности.* Пусть X — компакт и $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — полунепрерывная снизу функция. Из определения полунепрерывности снизу следует, что множества $U_n := X \setminus \mathcal{L}_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}$ открыты в X. Ясно, что $\cdots \subset U_n \subset U_{n-1} \subset \cdots$ и что $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — открытое покрытие X (ибо $f(x) > -\infty$ $\forall x$).

Значит, в силу определения компактности, существует число $m \in \mathbb{Z}$ такое, что $X = U_m$, т. е. функция f ограничена снизу.

[4]где $\mathbf{E}^n$ — определённое в гл. 2 n-мерное евклидово пространство

[5]Производные гладкой выпуклой функции на $\mathbf{E}^n$ (которые в этом случае называются *градиентами*) задают монотонное отображение.

[6]Напомним, что многозначным отображением называется отображение, которое каждому $x \in X$ ставит в соответствие некоторое подмножество (возможно, пустое) множества Y.

Пусть μ — нижняя грань f на X и допустим, что эта нижняя грань не достигается. Обозначим через $V_n := X \setminus \mathcal{L}_{\mu+(1/n)}(f) \quad n \in \mathbb{N}$. Из определения полунепрерывности снизу следует, что $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ есть открытое покрытие X. Значит, (из определения компактности) существует номер $s \in \mathbb{N}$ такой, что $X = V_s$, т. е. $f > \mu + 1/s$, что противоречит определению μ. $\square$

II. *Доказательство принципа Бэра.*

Пусть (X, d) — полное пространство и $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ счётное семейство нигде неплотных множеств. Докажем, что существует $\widehat{x} \in X \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

1. **Лемма.** *Последовательность вложенных (замкнутых) шаров в X, радиусы которых стремятся к нулю имеют единственную общую точку.*

Действительно, обозначим через $\mathrm{B}(\xi, r)$ шар $\{x \mid d(\xi, x) \le r\}$ с центром в ξ радиуса r и пусть $\mathrm{B}(x_1, r_1) \supset \mathrm{B}(x_2, r_2) \supset ..., r_i \to 0$ — система вложенных шаров, радиусы которых стремятся к нулю. Нетрудно понять, что последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна и значит, в силу полноты (X, d) элементы x_n сходятся к некоторому элементу $\xi \in X$. При этом ясно, что $\xi \in \cap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}(x_n, r_n)$. Единственность легко следует из того, что радиусы стремятся к нулю. Лемма доказана.

2. Из определения нигде неплотности следует, что существует пара (ξ_1, r_1) такая, что $\mathrm{B}(\xi_1, r_1) \cap A_1 = \emptyset$. Аналогично существует пара (ξ_2, r_2) такая, что $\mathrm{B}(\xi_2, r_2) \subset \mathrm{B}(x_1, r_1)$ и при этом $\mathrm{B}(\xi_2, r_2) \cap A_2 = \emptyset$, и так далее. Из леммы получаем, что $\xi_n \to \widehat{x}$, $\widehat{x} \in X$, $\widehat{x} \in \mathrm{B}(\xi_n, r_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\widehat{x} \notin A_n\ \forall n$. $\square$

III. *Доказательство принципа сжимаемости.*

Нам даны: (X, d) — полное метрическое пространство и $F : X \to X$ — сжимающее отображение (т. е. существует такое θ, $0 < \theta < 1$, что $d(F(x), F(x')) \le \theta d(x, x')$ для любых x и x').

Пусть $x_0 \in X$ произвольный элемент. Положим $x_n = F(x_{n-1}), n \in \mathbb{N}$. Имеем:

$$
\begin{aligned}
d(x_{n+m}, x_m) &\overset{\text{нер-во тр-ка}}{\le} d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + d(x_{n+m-1}, x_{n+m-2}) + ... \\
+d(x_{m+1}, x_m) &\overset{\text{Id}}{=} d(F(x_{n+m-1}), F(x_{n+m-2})) + ... + d(F(x_m), F(x_{m-1})) \overset{\text{сжим.}}{\le} \\
&\qquad d(x_1, x_0)(\theta^{n+m-1} + ... + \theta^{m-1}).
\end{aligned}
$$

Значит, последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна и следовательно, x_n сходится к некоторому $\widehat{x}$. Далее имеем:

$$d(F(\widehat{x}), x_{n+1}) = d(F(\widehat{x}), F(x_n)) \le \theta d(\widehat{x}, x_n) \to 0$$

и значит, $d(F(\widehat{x}), \widehat{x}) = 0$, т. е. $\widehat{x} = F(\widehat{x})$. Единственность очевидно следует из сжимаемости. $\square$

IV. *Идея доказательства принципа Брауэра.* Докажем принцип Брауэра в одномерном случае, а многомерный случай пока отложим.

Пусть F — непрерывное отображение отрезка $[-1, 1]$ в себя, не имеющее неподвижной точки. Положим $G(x) = \frac{x-F(x)}{|x-F(x)|}$. Это непрерывное отображение отрезка в две точки $\{-1, 1\}$, что противоречит теореме о промежуточных значениях непрерывной функции.

Несколько изменим это доказательство, сохранив начальную конструкцию, и это даст возможность доказать теорему в многомерном случае. Воспользуемся теоремой Вейерштрасса о приближении непрерывных функций полиномами. Из-за этой теоремы можно считать, что F — полином (если докажем теорему для полиномов, то потом, перейдя к пределу, докажем её и для непрерывных функций). Если же F полином, то G непрерывно дифференцируемая функция. При этом из определения интеграла вытекает, что $\int_{-1}^{1} G'(x)dx$ это длина образа G, т. е. нуль, ибо образ G — это две точки. Но с другой стороны, по формуле Ньютона – Лейбница получается, что $\int_{-1}^{1} G'(x)dx = G(1) - G(-1) = 2$. Противоречие доказывает теорему.

Это рассуждение проходит и в многомерном случае, надо лишь формулу Ньютона – Лейбница заменить её многомерным обобщением — формулой Стокса – Пуанкаре (её мы обсудим во второй части курса).

V. *Идея доказательства принципа Минти – Браудера*

Снова пусть $n = 1$ и функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ строго монотонна и коэрцитивна. Тогда она стремится к минус бесконечности, когда $x \to -\infty$ и к плюс бесконечности, когда $x \to +\infty$. Значит, можно ограничиться отрезком. А тогда вступает в силу метод деления пополам. В многомерном случае имеется сходный метод *отсечения*, о котором речь пойдёт также во второй части курса.

4.2. Приложения.

Начнем с приложений принципа Бэра.

Напомним, что число, являющееся корнем многочлена с целыми коэффициентами, называется *алгебраическим*. Нетрудно понять, что множество алгебраических чисел счётно.

Теорема 4.1. *a) Иррациональные и трансцендентные числа существуют; b) континуум несчетен.*

Несчётность континуума уже была нами доказана, а утверждение a) сразу вытекает отсюда, но нам хочется показать, что эти результаты непосредственно вытекают из принципа Бэра и полноты $\mathbb{R}$.

Доказательство. Множество $\mathbb{Q}$ и множество алгебраических чисел счётны. Отрезок $[0, 1]$ (мощность которого, по определению, есть мощность континуума) является по доказанному нами в разделе "Числа" полным метрическим пространством. Для доказательства утверждений теоремы остается применить принцип Бэра. □

Принято говорить, что приведённое нами доказательство существования иррационального и трансцендентного чисел (с помощью принципа Бэра) "неконструктивно". Но такое мнение является заблуждением: рациональные (алгебраические) числа можно явно занумеровать и явно задать отрезок Δ_n, не содержащий n-го рационального (алгебраического) числа, что приводит к конструктивному (алгоритмическому) определению иррационального (алгебраического) числа.

Наметим ещё доказательство того, что *существует непрерывная на отрезке* $[0,1]$ *функция, у которой ни в одной точки нет производной.* Рассмотрим пространство $C([0,2])$ и в нём совокупность A_n функций $f(\cdot)$ таких, что найдётся точка $\xi \in [0,1]$ такая, что $\sup_{0<h<1} \frac{|f(\xi+h)-f(\xi)|}{h} \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. В любом открытом множестве, содержащемся в $C([0,2])$, можно расположить ломаную с наклонами бо́льшими $n+1$ и тогда малая окрестность этой ломаной не будет пересекаться с A_n. Из принципа Бэра следует, что найдётся функция $\widehat{x}(\cdot)$, не принадлежащая ни одному из множеств A_n, т. е. не имеющая производной ни в одной точке из $[0,1]$.

А теперь докажем результат, основывающийся на принципе компактности.

Теорема 4.2 (основная теорема алгебры). *Каждый многочлен с комплексными коэффициентами степени* ≥ 1 *имеет комплексный корень.*

Доказательство. Пусть $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ – полином степени $n \geq 1$, у которого $a_0 a_n \neq 0$ (если $a_0 = 0$, то доказывать нечего — у него корень нуль). Рассмотрим функцию $f(z) = |p(z)|^2$ и докажем, что она достигает своего минимума в $\mathbb{C}$. Действительно, в силу неравенства треугольника для модулей имеем:

$$f(z) \overset{def}{=} \Big|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\Big|^2 \geq \left(|a_n||z|^n - \Big|\sum_{i=1}^{n-1} a_k z^k\Big|\right)^2 = |a_n|^2|z|^{2n}(1 + O(1/|z|)) \to \infty$$

при $|z| \to \infty$. Итак, функция f растёт на бесконечности, и значит, найдётся такое число $R > 0$, что вне круга радиуса R с центром в нуле значения функции f будут больше её значения в нуле, и значит, минимум надо искать в этом круге. Такой круг является компактом в $\mathbb{C}$, и для доказательства существования минимума f остается лишь сослаться на принцип компактности.

Не ограничивая себя в общности, можно считать, что минимум достигается в нуле (если минимум находился бы в точке $\widehat{z} \neq 0$, мы рассмотрели бы полином $q(z) = p(z - \widehat{z})$) и $f(0) > 0$. Пусть $s > 0$ первый отличный от нуля коэффициент полинома p. Пусть далее γ — аргумент числа $a_0 \bar{a}_s$. Фиксировав θ рассмотрим числа $te^{i\theta}$ и тогда получим:

$$f(te^{i\theta}) = |a_0 + a_s t^s e^{is\theta} + \ldots + a_n t^n e^{in\theta}|^2 =$$
$$(a_0 + a_s t^s e^{is\theta} + o(t^s))(\bar{a}_0 + \bar{a}_s t^s e^{-is\theta} + o(t^s)) =$$
$$f(0) + t^s 2|a_0 a_s| \cos(s\theta + \gamma) + o(t^s) < f(0),$$

если θ подобрать так, чтобы $\cos(s\theta + \gamma)$ было бы отрицательным числом, а t взять достаточно малым. Противоречие доказывает теорему. □

Одно из важнейших приложений принципа сжимающих отображений – доказательство теоремы существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{1}$$

где f – заданная функция, а функцию $y(\cdot)$ требуется найти. Задачу (1) называют *задачей Коши.* Будем предполагать, что функция f определена и непрерывна в некоторой области G, содержащей точку (x_0, y_0), и удовлетворяет в этой области условию Липшица по y с некоторой константой M:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2. \tag{2}$$

Имеет место

Теорема 4.3 (о существовании решения задачи Коши). *Найдется число* $d > 0$ *такое, что на отрезке* $[x_0 - d, x_0 + d]$ *существует единственное решение уравнения (1).*

Доказательство. 1. Подберем $d' > 0$ так, чтобы квадрат $Q := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| \le d', \quad |y - y_0| \le d'\}$ целиком лежал в G. Из теоремы Вейерштрасса о свойствах непрерывной функции на компакте следует, что существует число $K > 0$ такое, что

$$|f(x,y)| \le K \ \forall (x,y) \in Q. \tag{i}$$

Подберем теперь $d > 0$ так, чтобы прямоугольник $\Pi = \{|x - y| \le d, |y - y_0| \le Kd\}$ лежал в Q и при этом $Md < 1$ (где M – константа Липшица из (2)). Обозначим через C^* подмножество пространства $C([x_0 - d, x_0 + d])$, состоящее из функций, графики которых лежат в Π. Легко понять, что это подмножество замкнуто, и следовательно, оно полно (в силу теоремы Вейерштрасса о полноте пространства непрерывных функций на отрезке). Рассмотрим отображение $Fy(\cdot) = z(\cdot)$, задаваемое формулой

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

2. Покажем, что это отображение переводит C^* и себя и является сжимающим. Действительно, пусть $y(\cdot) \in C^*$, тогда

$$|z(x) - y_0| \overset{\mathrm{Id}}{=} \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)dt \right| \overset{(i)}{\le} Kd \quad \Rightarrow FC^* \subset C^*.$$

$$|z_1(x) - z_2(x)| \le \left| \int_{x_0}^{x} \left(f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)\right) dt \right| \overset{(2)}{\le} Md\ (d(y_1(\cdot), y_2(\cdot))).$$

Из последней формулы вытекает, что F – сжимающее отображение, и значит, из принципа сжимаемости следует, что существует единственная функция η, такая, что

$$\eta(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \eta(t))dt \quad \leftrightarrow \eta'(x) = f(x, \eta(x)), \eta(x_0) = y_0.$$

□

Дополнение. Пусть F – такое непрерывное отображение полного метрического пространства (X, d) в себя, что *некоторая его степень* $\Phi = F^n$ является сжатием. Тогда уравнение $Fx = x$ имеет единственное решение.

Действительно, пусть x – неподвижная точка $\Phi : \Phi x = x$. Тогда

$$Fx \overset{\mathrm{Id}}{=} F\Phi x \overset{\mathrm{Id}}{=} F\Phi^k x = \Phi^k Fx \to x, \quad \text{при} \quad k \to \min,$$

ибо Φ – сжимающее и значит, $\Phi^k \xi \to x\ \forall \xi$. Значит, $Fx = x$. Единственность очевидна.

Этот результат мы применим к доказательству еще одного очень важного результата. Пусть $T > 0$, $K(\cdot,\cdot) : [0,T]^2 \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, заданная на квадрате $[0,T]^2$. Поставим в соответствие функции $x(\cdot) \in C([0,T])$ функцию

$$Fx(t) = y(t) + \int_0^t K(t,\tau)x(\tau)d\tau.$$

Отображение F (или, как еще говорят, *оператор* F) называется *оператором Вольтерра.* Покажем, что некоторая степень этого оператора является сжатием. Имеем:

$$|Fx_1(t) - Fx_2(t)| \le \left| \int_0^t K(t,\tau)(x_1(\tau) - x_2(\tau))d\tau \right| \le Mt(d(x_1(\cdot), x_2(\cdot))),$$

где $M = \max_{0 \le t,\tau \le 1} |K(t,\tau)| \quad (i)$.

Отсюда

$$|F^2 x_1(t) - F^2 x_2(t)| \le Md(Fx_1(\cdot), Fx_2(\cdot)) | \int_0^t \tau d\tau | \overset{(i)}{\le} M^2 \frac{t^2}{2}(d(x_1(\cdot), x_2(\cdot))).$$

И вообще

$$|F^n x_1(t) - F^n x_2(t)| \le M^n \frac{t^n}{n!}(d(x_1(\cdot), x_2(\cdot))).$$

Значит, как только $((MT)^n/n!) < 1$ получаем, что отображение F^n сжимающее и следовательно, существует единственное решение уравнения Вольтерра:

$$\xi(t) = y(t) + \int_0^t K(t,\tau)\xi(\tau)d\tau$$

на отрезке $[0, T]$. А так как решение решение любого линейного дифференциального уравнения сводится к решению уравнения Вольтерра, фактически нами доказано, что *решение задачи Коши для линейного уравнения существует и единственно на всей прямой.* Ограничимся двумя примерами.

Решение уравнения $y'(x) = y(x), \quad y(0) = 1$ сводится к решению уравнению Вольтерра с ядром тождественно равным единице. Значит, из доказанного следует, что решение этого уравнения существует и единственно, и его можно получить методом итераций. Если начинать с $y_0(t) \equiv 1$, получаем такую сходящуюся последовательность: $y_0(x) \equiv 1$, $y_1(x) = (Fy_0)(x) = 1 + \int_0^x 1dt = 1 + x$, $y_2(x) = (Fy_1)(x) = 1 + \int_0^x (1+t)dt = 1 + x + x^2/2$, и так далее.

Ясно,что эта последовательность сходится к функции $e^x = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{x^n}{n!}$. Мы ещё раз пришли к разложению функции $x \to e^x$ в ряд Маклорена.

Аналогично, если рассмотреть уравнение $y'' + y = 0$ с краевыми условиями $y(0) = 1, y'(0) = 0$, то оно оказывается эквивалентным уравнению Вольтерра с ядром $K(t,\tau) = (t-\tau)_+$. [7]сли $a \in \mathbb{R}$, то $a_+ = \max(a, 0)$. Применив метод итераций, начиная с $x_0(t) \equiv 1$, приходим к формуле $\cos t = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$. Аналогично показывается, что $\sin t = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

[7]E