Математический анализ, 2 курс. Листок 1

1. Пусть F — многочлен над $\mathbb{C}$ от n переменных, и пусть

$$\{ V = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid F(z_1, \dots, z_n) = 0\}.$$

Предположим, что для всякой точки $z \in V$ хотя бы одна из производных $\partial F/\partial z_j$ отлична от нуля. Докажите, что V является $(2n-2)$-мерным гладким многообразием.

Пусть $f\colon X \to Y$ — гладкое отображение гладких многообразий. *Критической точкой* отображения f называется всякая точка $x \in X$, в которой ранг производной отображения f не максимален.

2. Пусть $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $Y = \mathbb{R}^2$, и пусть отображение проекции $p\colon X \to \mathbb{R}^2$ задается формулой $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Найдите критические точки отображения p. Как обобщить результат этой задачи на другие подмногообразия в $\mathbb{R}^3$?

3. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — гладкое подмногообразие, $H \subset \mathbb{R}^n$ — гиперплоскость, $p \in \mathbb{R}^n \setminus (X \cup H)$. Отображение $\pi_p\colon X \to H$ сопоставляет точке $x \in X$ точку $\pi_p(x)$, являющуюся пересечением прямой $\overline{px}$ с гиперплоскостью H. Как описать критические точки этого отображения? (Постарайтесь свести вычисления к минимуму.)

4. Постройте в явном виде (задайте формулами) вложение $\mathbb{RP}^n$ в какое-нибудь $\mathbb{R}^N$ в качестве подмногообразия.

5*. Постройте (более или менее) явное вложение $\mathbb{RP}^2$ в $\mathbb{R}^4$ (в $\mathbb{R}^3$ его вложить уже не удастся, но для доказательства этого факта у нас не хватает техники).

6. Пусть $SL_n \subset \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ — специальная линейная группа (множество матриц с определителем 1). Покажите, что SL_n является гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^{n^2} = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

7. Аналогичный вопрос для ортогональной группы O_n, состоящей из матриц X, удовлетворяющих условию ${}^tXX = I$ (какова, в частности, ее размерность)?

8. Пусть V — вещественное векторное пространство размерности n и $G = G(k, V)$. Покажите, что касательное пространство к G в точке, соответствующей подпространству $E \subset V$, естественно изоморфно $\mathrm{Hom}(E, V/E)$.

9. Пусть $C \subset \mathbb{R}^n$ — гладкая кривая (т.е. образ гладкого вложения $i\colon R \to \mathbb{R}^n$). Определим отображение $\varphi\colon C \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ по формуле $(x, t) \mapsto x + tv$, где v — касательный вектор в точке $x \in C$ (уточните определение самостоятельно). Что можно сказать о критических точках отображения φ? (Образ отображения φ называется *развертывающейся поверхностью.*)