Экзаменационные задачи по многомерному комплексному анализу.

Задача 1. Приведите пример некомпактного комплексного многообразия, на котором нет непостоянных голоморфных функций.

Задача 2. Пусть U и V — две области в $\mathbb{C}^n$ с оболочками голоморфности $(\widetilde{U}, p)$ и $(\widetilde{V}, q)$ соответственно. Докажите, что любое биголоморфное отображение $f : U \to V$ продолжается до биголоморфного отображения $\widetilde{f} : \widetilde{U} \to \widetilde{V}$.

Задача 3. Пусть $K \subset X$ — голоморфно выпуклый компакт в многообразии Штейна X. Докажите голоморфную выпуклость компакта $K \cup \{a\}$ для любой точки $a \in X$.

Задача 4. Рассмотрим в $\mathbb{C}^2$ вполне вещественную плоскость

$$\mathbb{R}^2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 = 0\}.$$

Докажите, что любая голоморфная в $\mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2$ функция голоморфно продолжается на все $\mathbb{C}^2$.

Задача 5. Докажите, что

$$\begin{aligned} &H_c^{p,q}(\mathbb{C}^n) = 0 \quad \text{при } p \geq 0, \ \ 0 \leq q \leq n-1; \\ &H_c^{p,n}(\mathbb{C}^n) \neq 0 \quad \text{при } p \geq 0. \end{aligned}$$