НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ГЕОМЕТРИЯ

18 ноября 2003 года

1) Докажите, что все собственные движения модели Пуанкаре в единичном круге имеют вид
$$z \mapsto \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}},$$
где a, b — такие комплексные числа, что $|a|^2 - |b|^2 = 1$.

2) a) Докажите, что если a — расстояние от точки A до прямой l, а α — угол параллельности для A и l, то
$$a = c\ln\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)$$
b) Докажите эквивалентность предыдущей формулы следующим:
$$\operatorname{ch}\left(\frac{a}{c}\right)\sin\alpha = 1; \quad \operatorname{sh}\left(\frac{a}{c}\right)\operatorname{tg}\alpha = 1; \quad \operatorname{th}\left(\frac{a}{c}\right) = \cos\alpha.$$

3) Докажите, что стороны и углы треугольника с прямым углом γ связаны следующими соотношениями:
$$\operatorname{sh} a = \operatorname{sh} c \sin\alpha; \quad \operatorname{th} b = \operatorname{th} c\cos\alpha; \quad \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ch} c; \quad \cos\alpha = \operatorname{ch} a\sin\beta.$$
В какие соотношения они переходят при малых a, b и c?

4) Докажите, что стороны и углы треугольника связаны следующими соотношениями:
$$a)\operatorname{ch} a\sin\beta = \operatorname{ch} b\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma;$$
$$b)\operatorname{ch} a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

5) Докажите, что если соответственные углы двух треугольников равны, то равны и сами треугольники.

6) Докажите, что все точки евклидовой прямой $y = kx$, лежащие в верхней полуплоскости, равноудалены от гиперболической прямой Oy.

7) а) Докажите, что гиперболическая окружность в любой из моделей Пуанкаре является евклидовой окружностью.

   б) Для модели Пуанкаре в верхней полуплоскости найдите центр и радиус евклидовой окружности, являющейся гиперболической окружностью радиуса r с центром в точке (a, b).

в) Для модели Пуанкаре в круге H найдите соотношение между гиперболическим и евклидовым радиусами окружности с центром в центре круга H.

8) Докажите неравенство треугольника в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости.

9) Докажите, что в одной точке пересекаются a) биссектрисы треугольника; b) медианы треугольника; c) высоты треугольника.

10) (Гиперболическая теорема Менелая) Прямая l пересекает стороны BC, CA и AB треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что

$$\frac{\operatorname{sh} AC_1}{\operatorname{sh} C_1B} \cdot \frac{\operatorname{sh} BA_1}{\operatorname{sh} A_1C} \cdot \frac{\operatorname{sh} CB_1}{\operatorname{sh} B_1A} = 1.$$

11) (Гиперболическая теорема Чевы) На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

$$a)\ \frac{\sin ACC_1}{\sin C_1CB} \cdot \frac{\sin BAA_1}{\sin A_1AC} \cdot \frac{\sin CBB_1}{\sin B_1BA} = 1;$$

$$b)\ \frac{\operatorname{sh} AC_1}{\operatorname{sh} C_1B} \cdot \frac{\operatorname{sh} BA_1}{\operatorname{sh} A_1C} \cdot \frac{\operatorname{sh} CB_1}{\operatorname{sh} B_1A} = 1.$$