НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

23 сентября 2003 г. 1-ый курс

ГЕОМЕТРИЯ

1. Описать все конечные группы порядка ≤ 6 и придать им геометрический смысл.

2. Описать все нормальные подгруппы и факторгруппы

(a) группы симметрий треугольника;

(b) группы движений правильного тетраэдра.

3. Пусть G — группа движений плоскости, H — подгруппа параллельных переносов, а R — подгруппа вращений с фиксированным центром O. Доказать, что подгруппа H нормальна, а факторгруппа G/H изоморфна R.

4. Доказать, что если порядок подгруппы равен половине порядка группы (подгруппа *индекса* 2), то подгруппа нормальна.

4. Найти все орбиты и все стабилизаторы точек для группы G, порожденной перестановкой

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 3 & 9 & 4 & 10 & 6 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \in S_{10}$$

и действующей на множестве $\{1, 2, \ldots, 10\}$.

5. Найти максимальный порядок элемента в группе

(a) S_5; (b) S_{13}.

6. Найти минимальное число n такое, что в группе S_{13} нет элемента порядка n.

7. Доказать, что группа перестановок S_n порождается транспозицией (12) и циклом $(12\ldots n)$.

8. Задать группу симметрий треугольника с помощью образующих и соотношений двумя разными способами.

9. Сколько существуе гомоморфизмов свободной группы с двумя образующими в группу S_3? Сколько среди них эпиморфизмов?

10. Доказать, что группа, заданная образующими a, b и соотношениями

$$a^2 = b^n = e, \quad a^{-1}ba = b^{-1},$$

изоморфна группе диэдра D_n.

11. Доказать, что если между элементами a и b группы выполнены соотножения $a^5 = b^3 = 1,\ b^{-1}ab = a^2$, то $a = 1$.