НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

30 сентября 2003 г. 1-ый курс

ГЕОМЕТРИЯ

1) В пространстве $\mathbb{R}^3$ даны три плоскости P_1, P_2, P_3, проходящие через ось Oz и образующие углы α, β (между P_1 и P_2, P_2 и P_3).
   а) При каких условиях на α, β группа, порожденная отражениями относительно этих плоскостей, будет конечной?
   б) Если эти условия выполнены, как найти фундаментальную область этого действия?
2) На плоскости $\mathbb{R}^2$ рассматриваются три прямые P_1, P_2, P_3, образующие треугольник с внутренними углами α, β, γ.
   а) При каких условиях на α, β, γ группа, порожденная отражениями относительно P_1, P_2, P_3, будет дискретной?
   б) При выполнении этих условий, как найти фундаментальную область этого действия?
3) Рассмотрим шесть прямых $P_1, \ldots, P_6$, содержащих шесть сторон правильного шестиугольника в $\mathbb{R}^2$, и группу G, порожденную отражениями относительно этих прямых. Задает ли G геометрию Кокстера? Обоснуйте ответ, не пользуясь теоремой классификацией двумерных геометрий Кокстера, а также пользуясь ей.
4) Пусть F — треугольний Кокстера, s_1, s_2, s_3 — отражения относительно его сторон, а G_F — соответствующая группа отражений.
   а) Опишите геометрически и с помощью слов все элементы группы G_F, оставляющие на месте фиксированную вершину треугольника F.
   б) Опишите геометрически и с помощью слов все параллельные переносы группы G_F.
   Рассмотрите каждый из трех треугольников Кокстера отдельно.
5) Нарисуйте схемы Кокстера для
   а) многоугольников Кокстера;
   б) трехмерных многогранников Кокстера.
6) Докажите, что из каждой вершины трехмерного многогранника Кокстера выходит ровно три ребра.
7) Пусть (F, G_F) — геометрия Кокстера (произвольной размерности). Докажите, что
   а) если $s \in G_F$ — отражение относительно гиперплоскости P, то gsg^{-1} — отражение относительно гиперплоскости gP $(g \in G_F)$.
   б) Любое отражение из группы G_F сопряжено отражению относительно одной из граней многогранника F.
8) * Найдите какой-нибудь четырехмерный многогранник Кокстера, кроме куба.