НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ГЕОМЕТРИЯ

14 октября 2003 года

1) На прямой заданы попарно различные точки A, B, C, D и E. Докажите, что
$$[A,B,C,D]\cdot[A,B,D,E]\cdot[A,B,E,C]=1.$$
2) Сколько различных значений принимает двойное отношение четырех точек при перестановках этих точек?
3) Четыре плоскости в $\mathbb{R}^3$ проходят через одну прямую. Докажите, что двойное отношение точек, в которых прямая l пересекает эти плоскости, не зависит от выбора прямой l.
4) Докажите, что квадрат нетождественного преобразования $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ тождествен тогда и только тогда, когда $a+d=0$.
5) Докажите, что любое нетождественное дробно-линейное преобразование с неподвижными точками a и b имеет вид
$$x \mapsto \frac{\lambda x - ab}{x+\lambda-a-b}.$$
6) Дробно-линейное преобразование f таково, что $f(a)\neq a$ и $f(f(a))=a$ для некоторого a. Докажите, что $f(f(x))=x$ для всех x.
7) Докажите, что любое дробно-линейное преобразование можно представить в виде композиции не более трех дробно-линейных преобразований, квадрат каждого из которых тождествен.
8) Сформулируйте и докажите теорему, двойственную теореме о проективном соответствии.
9) Сформулируйте и докажите теорему, двойственную теореме Паппа.
10) Сформулируйте и докажите теорему, двойственную теореме Дезарга.
11) В $\mathbb{R}^3$ заданы три попарно скрещивающиеся прямые l, l_1 и l_2. Сопоставим точке $A_1 \in l_1$ точку A_2, в которой прямая l_2 пересекает плоскость, содержащую точку A_1 и прямую l. Докажите, что отображение $A_1 \mapsto A_2$ прямой l_1 в прямую l_2 проективно.
12) На плоскости даны прямые $l_1,\dots,l_{n-1}$ и l. На прямой l взяты точки $O_1,\dots,O_n$. Продолжения сторон n-угольника $A_1\dots A_n$ проходят через точки $O_1,\dots,O_n$, а вершины $A_1,\dots,A_{n-1}$ движутся по прямым $l_1,\dots,l_{n-1}$. Докажите, что вершина A_n движется при этом по некоторой прямой.