Семинар 1

Напомним, что грассманиан $\mathbb{G}(N,r) = \{\mathbb{P}^r \subset \mathbb{P}^N\}$ является проективным многообразием размерности $(r+1)(N-r)$, которое имеет каноническое плюккерово вложение в пространство $\mathbb{P}^{\binom{N+1}{r+1}-1} = \mathbb{P}(\Lambda^{r+1}(k^{N+1}))$. На грассманиане можно ввести дискретную метрику: $\rho(\lambda_1,\lambda_2) = r - \dim(L_1 \cap L_2) = \dim(< L_1, L_2 >) - r$, где подпространства L_1, L_2 соответствуют точкам грассманиана λ_1 и λ_2 соответственно (в дальнейшем мы будем постоянно использовать это обозначение). Возникает ряд вопросов: описание симплексов (множеств равноудалённых друг от друга точек), сфер и т.п.

Пример 1. Грассманиан $\mathbb{G}(3,1)$.

Как известно, грассманиан $\mathbb{G}(3,1)$ является квадрикой в $\mathbb{P}^5$. Для него $\rho(\lambda_1,\lambda_2) \leq 1 \leftrightarrow L_1 \cap L_2 \neq \emptyset \leftrightarrow < \lambda_1, \lambda_2 > \subset \ G(3,1)$.

Симплексы с ребром 1 бывают двух типов: α-плоскость, являющаяся множеством $\{L | p \in L\}$, где p — некоторая точка, и β-плоскость, являющаяся множеством $\{L | L \subset \Pi^2\}$, где Π^2 — плоскость.

Упражнение 1. Показать, что $\dim \Sigma \leq 1$, где Σ симплекс с ребром 2.

Упражнение 2. 1) Проверить, что семейство прямых-образующих на гладкой квадрике $Q \subset \mathbb{P}^3$ соответствует конике $C \subset \mathbb{G}(3,1)$.

2) Описать коники на грассманиане, соответствующие гладким квадрикам.

3)* Каким семействам подпространств $\mathbb{P}^r \subset \mathbb{P}^N$ могут соответствовать коники на грассманиане $\mathbb{G}(N,r)$?

Пусть $X^n \subset \mathbb{P}^N$ - алгебраическое многообразие. Отображение Гаусса $\gamma : X \dashrightarrow \mathbb{G}(N,n)$, определенное на $\mathrm{Sm}X$, сопоставляет точке $x \in \mathrm{Sm}X$ касательное пространство L_x в ней к X. Проблемами, близкими к теории дифференциальных уравнений, являются восстановление X по $\gamma(X)$, а также нахождение условий на подмногообразие в грассманиане, означающих, что оно является чьим-то гауссовым образом.

Упражнение 3. Доказать, что $\gamma(v_3(\mathbb{P}^1)) = v_4(\mathbb{P}^1)$.

Пусть теперь $\Sigma^1 \subset \mathbb{G}(3,1)$ — кривая, являющаяся симплексом с ребром 2.

Задача 4. 1) Показать, что для любой точки $x \in \Sigma$ существует гиперплоскость, пересекающаяся с Σ ровно по x.

2) Доказать, что этим свойством обладают лишь рациональные нормальные кривые.

3) Получить, что в нашем случае степень кривой Σ должна быть четной.

4) Вывести отсюда, что Σ соответствует либо семейству прямых-образующих на квадрике, либо семейству касательных к скрученной кубике.

Задача 5. Доказать, что кривая $\Sigma \subset \mathbb{G}(N,1)$ является семейством касательных к некоторой кривой (то есть интегрируется) тогда и только тогда, когда касательная прямая к любой гладкой точке $x \in \Sigma$ лежит на грассманиане $\mathbb{G}(N,1)$.

Рассмотрим $C \subset \mathbb{P}^3$.

Задача 6. 1) Показать, что $4 \leq \dim < \gamma(C) >$.

2)* Доказать, что для любой проективной гладкой кривой C существует изоморфная ей кривая $C' \subset \mathbb{P}^3$, для которой $\dim < \gamma(C') >= 4$ (*).

3)(открытый вопрос) Если $C \subset \mathbb{P}^3$ гладкая, линейно нормальная кривая, для которой выполняется условие (*), то $C = v_3(\mathbb{P}^1)$.

Напомним, что многообразие инциндентности — это $I \subset \mathbb{P}^N \times \mathbb{G}(N,r)$ такое, что

$$I = \{(x,\lambda) | x \in L_\lambda\}.$$

Оно является пространством проективизации тавтологического расслоения над $\mathbb{G}(N,r)$. Обозначим через p проекцию I на $\mathbb{P}^N$, а через π — проекцию на $\mathbb{G}(N,r)$. Для подмногообразия $\Sigma \subset \mathbb{G}(N,r)$ можно рассмотреть $U_\Sigma = \pi^{-1}(\Sigma)$ и $V_\Sigma = p(U_\Sigma)$.

Определение. Σ называется *quasiscroll*, если $p : U_\Sigma \to V_\Sigma$ биекция. Σ называется *scroll*, если $p : U_\Sigma \to V_\Sigma$ изоморфизм.

Заметим, что особенности V_Σ могут появляться по трем причинам: особенности самого Σ, склеиванье точек при отображении p и, наконец, ветвление p.

Упражнение 7. Понять, почему $\gamma(v_3(\mathbb{P}^1))$ является quasisroll'ом, но не sroll'ом (для этого вспомнить, где находятся особенности у многообразия касательных).

Упражнение 8. 1) Доказать, что $\Sigma \subset \mathbb{G}(N,1)$ является scroll'ом тогда и только тогда, когда $S\Sigma \cap \mathbb{G}(N,1) = \Sigma$, где $S\Sigma = \overline{\bigcup_{x,y\in\Sigma} < x,y >}$ — многообразие секущих.

2) Доказать, что $\Sigma \subset \mathbb{G}(N,1)$ quasiscroll тогда и только тогда, когда для любых двух точек $x, y \in \Sigma$ прямая $< x,y >$ пересекается с $\mathbb{G}(N,1)$ лишь по самим x и y.

Для грассманиана $\mathbb{G}(n,1)$ подмногообразие Σ является quasiscroll'ом тогда и только тогда, когда оно является симплексом с ребром 2.

Пример 2. Грассманиан $\mathbb{G}(4,1)$.

Задача 9. (Открытый вопрос)

1) Доказать, что $\dim(\Sigma) \leq 1$, если Σ quasiscroll.

2) Найти все quasiscroll-кривые на $\mathbb{G}(4,1)$.

Для решения этой задачи целесообразно рассмотреть следующие примеры.

Упражнение 10. 1) Показать, что касательные расслоения к $v_4(\mathbb{P}^1)$ и к эллиптической линейно нормальной кривой $C \subset \mathbb{P}^4$ являются quasiscroll'ами.

2) Доказать, что не существует других кривых в $\mathbb{P}^4$, обладающих этим свойством.

Рассмотрим непересекающиеся подпространства $\mathbb{P}^{n_1}, \dots, \mathbb{P}^{n_k} \subset \mathbb{P}^N$, где $N+1 = (n_1+1) + \ldots + (n_k+1)$. Выберем в каждом из них кривую Веронезе $v_{n_i}(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^{n_i}$ и изоморфизмы $\varphi_i : \mathbb{P}^1 \to v_{n_i}(\mathbb{P}^1)$. Тогда можно рассмотреть отображение $\psi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{G}(N, k-1)$, сопоставляющее точке $x \in \mathbb{P}^1$ подпространство $< \varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x) >$. Его образ Σ будет scroll'ом, а V_Σ называется *рациональным нормальным скроллом* и обозначается $S_{n_1,\dots,n_k}$.

Упражнение 11. Доказать, что V_Σ действительно рационально и проективно нормально.

Теорема. Невырожденное многообразие $X^n \subset \mathbb{P}^N$, имеющее минимальную возможную степень $N - n + 1$ может быть только

1) рациональным нормальным скроллом,

2) $v_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$,

3) конусом над многообразием из пункта 1) или 2).

Упражнение 12. 1) Показать, что скролл $S_{1,2} \subset \mathbb{P}^5$ изоморфен раздутию плоскости $\mathbb{P}^2$ в одной точке.

2) Показать, что $S_{1,2}$ является также гиперплоским сечением $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^5$.

3) Доказать, что $\Sigma \subset \mathbb{G}(4,1)$, соответствующее скроллу $S_{1,2}$, является $v_3(\mathbb{P}^1)$.

4) Описать Σ на языке линейных сечений грассманиана $\mathbb{G}(4,1)$.

Другой пример симплекса с ребром 2 можно построить, рассмотрев пересечение $\mathbb{G}(4,1)$ с общим подпространством $\mathbb{P}^5$. Это будет некоторая поверхность S.

Упражнение 13. 1) Доказать, что S — поверхность Дель Пеццо (то есть поверхность в $\mathbb{P}^n$ степени n, или поверхность, общее гиперплоское сечение которой является нормальной эллиптической кривой, или поверхность, вложенная по очень обильному антиканоническому классу).

2) Показать, что S не является quasiscroll'ом (использовать то, что на поверхностях Дель Пеццо есть прямые).

3) Показать, что общее гиперплоское сечение S является scroll'ом. Он называется *quintic elliptic scroll*.

4) Найти на S все кривые, пересекающиеся с прямыми на S не более, чем в одной точке с кратностью один. Ровно такие кривые на S будут scroll'ами.

5) Найти на S все кривые, пересекающиеся с прямыми на S не более, чем в одной точке. Ровно такие кривые на S будут quasiscroll'ами. Найти таким образом quasiscroll рода 2.

Задача 14. Доказать, что поверхность V_Σ изоморфна симметрическому квадрату эллиптической кривой Σ.

Задача 15. 1) Показать, что поверхность V_Σ иррегулярна, то есть $q = h^{10} = h^1(V_\Sigma, \mathcal{O}) > 0$. (Указание: гиперплоское сечение V_Σ — не линейно нормальная эллиптическая кривая в $\mathbb{P}^3$.)

Замечание. В $\mathbb{P}^3$ все поверхности регулярны.

Гипотеза. В $\mathbb{P}^4$ существует лишь конечное число иррегулярных поверхностей, причем для них $q \leq 2$.

Пример 3. Грассманиан $\mathbb{G}(5,2)$. Пусть $\Sigma \subset \mathbb{G}(5,2)$ множество диаметра 2.

Упражнение 16. Показать, что пересечение $< \Sigma > \cap \mathbb{G}(5,2)$ тоже имеет диаметр 2.

Упражнение 17. Доказать, что все нижеперечисленные семейства имеют диаметр 2, а также то, что каждое из них лежит в некотором подпространстве $\mathbb{P}^9 \subset \mathbb{P}^{19}$, пересекающемся с $\mathbb{G}(5,2)$ ровно по этому семейству. Найти, что за подмногообразия в $\mathbb{G}(5,2) \subset \mathbb{P}^{19}$ получаются таким образом.

1) Множество плоскостей $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^5$, лежащих в одном $\mathbb{P}^4$.

2) Множество плоскостей $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^5$, проходящих через одну точку $x \in \mathbb{P}^5$.

3) Множество плоскостей $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^5$, пересекающихся с данной плоскостью $\Pi \subset \mathbb{P}^5$ по прямой.

4) Множество касательных плоскостей к поверхности $v_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$.

Задача 18. Доказать, что если касательные плоскости к любым двум общим точкам поверхности $S \subset \mathbb{P}^N$ пересекаются, то S является либо $v_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$, либо конусом над некоторой кривой.

Упражнение 19. 1) Пусть $C \subset v_2(\mathbb{P}^2) = X$ — коника, являющаяся гиперплоским сечением, соответствующим сдвоенной прямой на $\mathbb{P}^2$. Показать, что все касательные плоскости к X в точках из C лежат в соответствующей гиперплоскости H.

2) Пусть $\Sigma_C \subset \mathbb{G}(4,2)$ — соответствующее одномерное семейство попарно пересекающихся плоскостей в $\mathbb{P}^4 = H$, а Σ_C^* — изоморфная ей кривая в грассманиане $\mathbb{G}(4,1)$, двойственном к $\mathbb{G}(4,2)$. Тогда Σ_C^* является семейством прямых, лежащих на скролле $S_{1,2} \subset \mathbb{P}^4$.