Семинар 2.

Начнем с изучения гауссовых образов плоских кривых.

Упражнение 1. 1) Доказать, что степень d^* двойственной кривой $C^* \subset \mathbb{P}^{2*}$ к плоской гладкой кривой $C \subset \mathbb{P}^2$ степени d равна $d(d-1)$.

2) Показать, что если гладкая кривая C не является прямой, то отображение Гаусса бирационально.

3) Пользуясь гессианом, найти количество каспов у кривой, двойственной к общей гладкой кривой.

3) Показать, что у кривой, двойственной к гладкой кубике, ровно 9 каспов, и любая прямая, проходящая через два из них, проходит и через третий. Доказать, что если девять точек на плоскости удовлетворяют такому свойству, то они могут быть получены как каспы кривой, двойственной к гладкой кубике. Показать, что над полем вещественных чисел такая ситуация с девятью точками невозможна. Подумать, с чем связано существование таких n точек для произвольного n.

Упражнение 2. Найти степень гауссова образа $\gamma(V_d) \subset \mathbb{P}^{n*}$ гиперповерхности степени d.

Для кривой $C \subset \mathbb{P}^N$ рассмотрим ее гауссов образ $\gamma(C) \subset \mathbb{G}(N,1)$ и соответствующую ему кривую $\Gamma \subset \mathbb{G}(\mathbb{P}^{N*}, N-2)$. Тогда $V_\Gamma = C^*$ будет двойственным многообразием к C.

Упражнение 3.

Пусть $C \subset \mathbb{P}^3$ — скрученная кубика, а TC объединение касательных к ней прямых. Доказать, что $C^* \cong TC$.

Рассмотрим теперь одномерное семейство $\Sigma \subset \mathbb{G}(N,r)$.

Упражнение 4. Пусть $N = 2n+1$, $r = n$ и Σ соответствует попарно непересекающимся n-плоскостям.

1) Доказать, что Σ является рациональной нормальной кривой.

2) Показать, что $\deg \Sigma \equiv n + 1 (\mathrm{mod} 2)$

Вернемся к общему случаю. Пусть $B \subset V_\Sigma$ — множество, состоящее из точек, над которыми ветвится отображение $p : U_\Sigma \to V_\Sigma$.

Упражнение 5. 1) Пусть $\alpha \in \mathrm{Sm}\Sigma$, положим $B_\alpha = B \cap L_\alpha$. Доказать, что замыкание объединения

$$T_\alpha = \overline{\bigcup_{x \in L_\alpha - \mathrm{Sing} V_\Sigma} T_{V_\Sigma, x}}$$

является линейным подпространством в $\mathbb{P}^N$.

2) Показать, что для точек $x,y \in L_\alpha$ прямая $< x, y >$ пересекается с B тогда и только тогда, когда $T_{V_\Sigma,x} = T_{V_\Sigma,y}$.

Напомним, что *порядком* многообразия $X^n \subset \mathbb{P}^N$ называется $\min\{m | S^m X = \mathbb{P}^N\}$, где $S^k X$ обозначает k-ое многообразие секущих к X. *Рангом* $\mathrm{rk} p$ точки $p \in \mathbb{P}^N$ относительно проективного многообразия $\mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^N$ называется $\min\{m|p \in S^m X\}$. Это понятие является непосредственным обобщением ранга матрицы (для случая $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{mn+m+n}$).

Упражнение 6. 1) Показать, что $T_{\Sigma,\alpha} \subset < \mathbb{G}(T_\alpha, B_\alpha, r) >$, где $\mathbb{G}(T_\alpha, B_\alpha, r) = \{B_\alpha \subset \mathbb{P}^r \subset T_\alpha\}$.

2) Доказать, что $\mathrm{rk}p$ относительно $\mathbb{G}(N,r)$ одинаковый для точек $p \in T_{\Sigma,\alpha}$, $p \neq \alpha$. Обозначим это число за $\mathrm{rk}T_{\Sigma,\alpha}$.

3) Доказать, что $\mathrm{rk}T_{\Sigma,\alpha} = 1$ тогда и только тогда, когда $\dim B_\alpha = r-1$, причем в этом случае Σ является множеством соприкасающихся r-мерных пространств к некоторой кривой $C \subset \mathbb{P}^N$ или соотвествует конусу над некоторой кривой $C' \subset \mathbb{P}^{N-1}$.

4) Показать, что $\mathrm{rk}T_{\Sigma,\alpha} = r+1$ тогда и только тогда, когда $B_\alpha = \emptyset$.

Вот еще несколько фактов про геометрию грассманианов и метрику на них.

Упражнение 7. Показать, что пересечение $T_\alpha \cap \mathbb{G}(N,r)$ является конусом над многообразием Сегре $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^{N-r-1}$.

Упражнение 8. Доказать, что для проективного многообразия $X^n \subset \mathbb{P}^N$ $\mathrm{diam}(\gamma(X)) \leq r \leq n+1$ тогда и только тогда, когда X можно взаимно однозначно спроектировать в $\mathbb{P}^{n+r}$.

И вот, еще одна конструкция семейства прямых в $\mathbb{P}^4$!

Упражнение 9. Пусть $S^2 \subset \mathbb{P}^4$ поверхность (не сфера!). Тогда множество гиперплоскостей $\mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^4$, содержащих касательное пространство $T_{S,p}$ к гладкой точке $p \in S$, является прямой в $\mathbb{P}^{4*}$. Следовательно, мы получаем двумерное семейство на грассманиане $\mathbb{G}(\mathbb{P}^{4*}, 1)$. Могут ли соответствующие прямые попарно не пересекаться?..