Семинар 3.

Часто интересные семейства подпространств возникают при рассмотрении пересечения грассманиана $\mathbb{G}(N, r)$ с линейными подпространствами L (как общего положения, так и специального). В случае грассманиана прямых для того, чтобы прямые из полученного семейства попарно не пересекались, надо, чтобы на $\mathbb{G}(N, 1) \cap L$ не было прямых.

Для каждого проективного многообразия $X^n \subset \mathbb{P}^M$ можно рассмотреть подмногообразие на грассманиане $\Phi(X) \subset \mathbb{G}(M, 1)$, состоящее из прямых, лежащих на X.

Задача 1. 1) Найти явно $\Phi(X)$, когда X является гладкой двумерной, трехмерной и четырехмерной квадрикой.

2) Найти $\dim(\Phi(\mathbb{G}(N, r)))$.

3) Пусть $X_L = X \cap L$ общее гиперплоское сечение $X \subset \mathbb{P}^M$. Доказать, что $\dim(\Phi(X_L)) = \dim(\Phi(X)) - 2$.

4) Найти, сколько раз надо посечь общими гиперплоскостями грассманиан $\mathbb{G}(N, 1)$, чтобы получить семейство попарно непересекающихся прямых. Заметим, что это семейство будет также являться и scroll'ом.

В частности, для $\mathbb{G}(2n + 1, 1)$ мы получаем n-мерное семейство $\Sigma^n \subset \mathbb{G}(2n + 1, 1)$.

Упражнение 2. Доказать, что поверхность $S \subset \mathbb{G}(5, 1)$, получаемая таким образом, является $K3$-поверхностью.

Общий вопрос об описании scroll'ов в $\mathbb{G}(N, 1)$ является открытым.

Задача 3. Найти 4 scroll'а в $\mathbb{G}(5, 1)$.

При $n \geq 3$ в $\mathbb{G}(2n + 1, 1)$ известны лишь два примера scroll'ов: построенное выше Σ и семейство, соответствующее $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^{2n+1}$.

Задача 4. Описать все scroll'ы и quasiscroll'ы, лежащие на общем линейном сечении $\mathbb{G}(4, 1) \cap \mathbb{P}^5$, то есть на рассматриваемой нами ранее поверхности дель Пеццо.

Упражнение 5. Найти такое специальное сечение $\mathbb{G}(4, 1) \cap \mathbb{P}^5$, которое состоит из $v_2(\mathbb{P}^2)$ и $\mathbb{P}^2$. Найти на нем все scroll'ы и quasiscroll'ы.

Вот еще один пример quasiscroll'а в $\mathbb{P}^4$:

Упражнение 6. Рассмотрим плоскую рациональную кривую $C \subset \Pi = \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^4$ степени d, обладающую ровно одной особой точкой — каспом кратности $d - 2$. Выберем прямую $l = \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^4$, не пересекающуюся с Π и морфизм нормализации $\varphi : l \to C$. Тогда в $\mathbb{G}(4,1)$ возникает семейство Σ_d, соответствующее прямым вида $< x, \varphi(x) >$, где $x \in l$.

1) Доказать, что Σ_d является quasiscroll'ом степени $d+1$, и что $\Sigma_d \subset \mathbb{P}^4$.

2) Найти явно Σ_d для всех d.

Задача 7*. Понять, почему все quasiscroll'ы на грассманиане $\mathbb{G}(4,1)$ являются вырожденными, то есть лежат в линейных подпространствах малой размерности (в наших примерах размерность не превосходит 5).

Теперь мы взглянем на вложения многообразий в грассманианы с точки зрения векторных расслоений. Пусть $E^r \to X$ векторное расслоение ранга r над проективным многообразием X. Для каждой точки $x \in X$ можно рассмотреть подпространство V_x в пространстве всех сечений $H^0(X,E)$, состоящее из тех сечений, которые обращаются в нуль над x. Пусть $N+1 = \dim(H^0(X,E))$. Если $N > r$, то $\operatorname{codim}_{H^0(X,E)} V_x \leq r$, и для общей точки $x \in X$ неравенство превращается в равенство. В этой ситуации мы получаем рациональное отображение $\varphi_E : X \dashrightarrow \mathbb{G}(N, N-r)$.

Упражнение 8. 1) Показать, что при достаточно большом n, описанное выше отображение φ корректно определено для расслоения $E(n) = E \otimes \mathcal{O}(n)$ и является регулярным вложением с линейно нормальным образом.

2) Пусть U^* — расслоение над грассманианом, двойственное тавтологическому. Тогда прообраз $\varphi^*_{E(n)}(U^*)$ совпадет с исходным расслоением $E(n)$ на X.

В частности, расслоениям над проективными пространствами $\mathbb{P}^n$ мы сопоставили многообразия Веронезе $v_m(\mathbb{P}^n)$, лежащие на грассманианах.

Задача 9*. Найти все вложения кривых Веронезе $v_m(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{G}(N,r)$ при произвольных r и $m = 3,4$. В частности, показать, что при больших $r >> m$ задача сводится к рассмотрению кривых Веронезе при r, близких к m.

Важным свойством расслоения E является возможность разложения его в сумму линейных, то есть представления в виде $E \cong L_1 \oplus \ldots \oplus L_r$. Заметим, что это свойство не меняется при его подкрутке на линейное расслоение, и таким образом мы можем рассматривать лишь те расслоения, которые задают вложения в грассманиан.

Таким образом, мы свели вопрос о разложимости произвольного векторного расслоения к аналогичному вопросу об ограничении тавтологического расслоения над грассманианом на соответствующие подмногообразия.

Задача 10. 1) Доказать, что над $\mathbb{P}^1$ все двумерные расслоения разложимы, используя вложения кривых Веронезе $v_m(\mathbb{P}^1)$ в грассманианы $\mathbb{G}(N, N-2) \cong \mathbb{G}(N, 1)$. Начать со случаев $m \leq 4$. (Указание. Для разложимости 2-расслоения достаточно наличия двух всюду различных сечений у соответствующего расслоения на проективные прямые).

2*) Доказать таким способом, что над $\mathbb{P}^1$ все расслоения разложимы.

Пример. Рассмотрим непересекающиеся подпространства $\mathbb{P}^{m_1}, \mathbb{P}^{m_2} \subset \mathbb{P}^N$ и вложение $\mathbb{P}^{m_1} \times \mathbb{P}^{m_2} \to \mathbb{G}(N, 1)$, сопоставляющее паре точек $x \in \mathbb{P}^{m_1}, y \in \mathbb{P}^{m_2}$ прямую $< x, y >$. Тогда расслоение, индуцированное на $\mathbb{P}^{m_1} \times \mathbb{P}^{m_2}$ тавтологическим раслоением, раложимо.

Задача 11. Доказать, что при $n \geq 2$ касательное расслоение над $\mathbb{P}^n$ неразложимо.

Гипотеза (Хартсхорн). Для любых m, r существует такое число $\lambda_r(m)$, что для любого $n \geq \lambda_r(m)$ и для любого N вложение $v_m(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{G}(N, r)$ соответствует разложимому r-расслоению над $\mathbb{P}^n$.

Мало изучен интересный вопрос об ограниченности функции $\lambda_r(m)$ по m.

Каждому расслоению $E^r \to \mathbb{P}^n$ можно (неоднозначно) сопоставить *класс Эйлера* — гладкое подмногообразие X коразмерности r в $\mathbb{P}^n$, являющееся множеством нулей общего сечения E.

Теорема (Серр). При $r = 2$ гладкое подмногообразие $X^{n-r} \subset \mathbb{P}^n$ является классом Эйлера некоторого раслоения тогда и только тогда, когда $K_X \in \mathbb{Z} \cdot H$, где K_X каноничекий класс, а H — гиперплоское сечение.

Напоследок заметим, что разложимость расслоения $E \to \mathbb{P}^n$ равносильна тому, что его класс Эйлера является полным пересечением, и приведём еще одну знаменитую гипотезу Хартсхорна.

Гипотеза Пусть $X^n \subset \mathbb{P}^N$ — проективное многообразие, удовлетворяющее условию $n \geq \frac{2N}{3}$. Тогда X — полное пересечение.

Что эта гипотеза говорит о разложимости векторных расслоений?