# Семинар 4.

**Упражнение 1.** Пусть $C \subset \mathbb{P}^N$ гладкая кривая. Доказать, что в точке $y \in T_{C,x}$, не совпадающей с $x$, касательная плоскость к $TC$ совпадает с контактной плоскостью к $C$ в точке $x$.

**Упражнение 2.** Найти не линейно нормальную кривую $C \subset \mathbb{P}^3$, для которой $\dim < \gamma(C) >= 4$.

Рассмотрим следующие два семейства прямых в $\mathbb{P}^{2n+1}$.

Пусть $C_{2n+1} \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ рациональная нормальная кривая, а $x_1, \ldots, x_{2n}$ — набор из $2n$ точек на ней. Аннулятор пространства $< x_1, \ldots, x_{2n} >$ всегда является прямой в $(\mathbb{P}^{2n+1})^*$, и мы получаем $2n$-мерное семейство в $\mathbb{G}(2n+1, 1)$, изоморфное $C^{(2n)} \cong \mathbb{P}^{2n}$.

Для построения второго семейства рассмотрим набор $x_1, \ldots, x_n$ из $n$ точек на $C$ и пространство $< T_{C,x_1}, \ldots, T_{C,x_n} >$, порожденное касательными прямыми. Его аннулятор опять будет прямой в $(\mathbb{P}^{2n+1})^*$, и мы имеем $n$-мерное семейство в $\mathbb{G}(2n+1, 1)$.

**Упражнение 3.** 1) Найти явно вложения $\mathbb{P}^{2n}$ и $\mathbb{P}^n$ в грассманиан $\mathbb{G}(2n+1, 1)$, соответствующие этим семействам.

2) Показать, что первое семейство не является quasicroll'ом, а второе — является. Найти, где особенности у quasiscroll'а (то есть объяснить, почему он не scroll).

**Упражнение 4.** Пусть $C \subset \mathbb{P}^N = \mathbb{P}(V)$ рациональная нормальная кривая. Доказать, что существует единственная с точностью до пропорциональности билинейная форма $< \cdot, \cdot >$ на $V$, для которой для любых двух точек $x, y \in C$ $< x, y >= 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

Перейдем к построению quasiscroll'ов в $\mathbb{G}(2n+1, n)$.

Есть два основных примера. Первый соответствует просто многообразию Сегре $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^1$. Для второго примера рассмотрим рациональную нормальную кривую $C_{2n+1} \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ и одномерное семейство оскулирующих $n$-мерных пространств к ней.

Если у нас есть два scroll'а в $\mathbb{P}^{2a+1}$ и $\mathbb{P}^{2b+1}$, то мы можем построить их "сумму" в $\mathbb{P}^{2(a+b+1)+1}$, рассмотрев произведение $\mathbb{P}^{2a+1} \times \mathbb{P}^{2b+1} \subset \mathbb{P}^{2(a+b+1)+1}$ и $(a+b+1)$-мерные подпространства, образованные всеми парами $a$-мерных и $b$-мерных подпространств из scroll'ов в $\mathbb{P}^{2a+1}$ и $\mathbb{P}^{2b+1}$ соответственно.

**Гипотеза.** Любой quasiscroll в $\mathbb{G}(2n+1, n)$ получается с помощью таких операций из двух основных.

**Упражнение 5.** 1) Найти явно, что за кривые на $\mathbb{G}(2n+1, n)$ получаются для двух основных quasiscroll'ов.

2) Пусть кривая $\Sigma^1 \subset \mathbb{G}(2n+1, n)$ является quasiscroll'ом. Показать, что $\deg(\Sigma) \geq n + 1$.

3) Доказать, что $\deg(\Sigma) = n + 1$ тогда и только тогда, когда $V_\Sigma = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^1$.