# Семинар 5.

**Упражнение 1.** Привести пример такой кривой $\Sigma^1 \subset \mathbb{G}(N,1)$, для которой касательные к конечному числу точек лежат на грассманиане $\mathbb{G}(N,1)$.

Пусть семейство $\Sigma \subset \mathbb{G}(N,1)$ является quasiscroll'ом.

**Упражнение 2.** 1) Показать, что в этом случае $\dim \Sigma < N-1$.

2) Доказать, что если $\Sigma$ неособый scroll, то $\dim \Sigma \leq \frac{N-1}{2}$.

До сих пор не известно примеров quasiscroll'ов, для которых $\dim \Sigma > \frac{N-1}{2}$.

**Задача 3.** Найти все гладкие quasiscroll'ы на $\mathbb{G}(4,1)$.

**Упражнение 4.** Показать, что диаметр $\gamma(X)$ не меняется при взаимно однозначной проекции (то есть при такой проекции, для которой центр не пересекается с многообразием секущих). Вывести отсюда решение упражнения 8 из семинара 2.

**Задача 5.** 1) Доказать, что грассманиан $\mathbb{G}(N,1) \subset \mathbb{P}^{\binom{N+1}{2}-1}$ можно изоморфно спроектировать в $\mathbb{P}^{4N-7}$, но нельзя изоморфно спроектировать ни в какое пространство меньшей размерности.

2) Найти наименьшую возможную размерность пространства, в которое можно изоморфно спроектировать многообразие Сегре $\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^b \subset \mathbb{P}^{ab+a+b}$.

Вернемся к рассмотрению кривой Веронезе $v_3(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3$.

**Задача 6.** 1)* Для произвольной невырожденной кривой $X \subset \mathbb{P}^3$ рассмотрим кривую $\widetilde{X} \subset \mathbb{P}^{3*}$, соответствующую множеству оскулирующих плоскостей к $X$. Доказать, что $\widetilde{\widetilde{X}} = X$.

2) Показать, что $\widetilde{v_3(\mathbb{P}^1)}$ тоже, в свою очередь, является скрученной кубикой в $\mathbb{P}^{3*}$, причем $v_3(\mathbb{P}^1)^* = T\widetilde{v_3(\mathbb{P}^1)}$. Верно ли аналогичное утверждение для произвольной пространственной кривой?

**Упражнение 7.** Показать, что касательное расслоение к скрученной кубике $Tv_3(\mathbb{P}^1)$ является биективной проекцией скролла $S_{2,2}$.

**Задача 8.** Изучить, как касается грассманиана $\mathbb{G}(N,1)$ общая касательная гиперплоскость. Найти, каково максимально возможное (по размерности) касание грассманиана $\mathbb{G}(N,1)$ гиперплоскостью.

Вот еще две задачи про расслоения, индуцируемые вложением в грассманиан.

**Задача 9.** Найти все возможные расслоения (их разложения), которые могут быть получены на кониках, лежащих в грассманиане.

**Задача 10.** Рассмотрим вложение $C^{(2)} \cong \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{G}(3,1)$, соответствующее семейству секущих к скрученной кубике $C = v_3(\mathbb{P}^1)$. Разложимо ли индуцированное этим вложением расслоение на $\mathbb{P}^2$?