Семинар 6.

Существует следующий интересный вопрос: для каких проективных многообразий $X^n \subset \mathbb{P}^N$ есть такое многообразие $\widetilde{X}^{n+1} \subset \mathbb{P}^{N+1}$, что X является его трансверсальным гиперплоским сечением $X = \widetilde{X} \cap H$? При этом, естественно, предполагается, что $\widetilde{X}$ не является просто конусом CX над X с вершиной в точке. Если для X существует такое $\widetilde{X}$, то для него тоже можно поставить аналогичный вопрос. Так мы получаем башню X, $\widetilde{X}$, $\widetilde{\widetilde{X}}$ и т.д.

Пример. 1) Вот первый самый простой пример: три неколлинеарные точки на $\mathbb{P}^2$, $v_3(\mathbb{P}^1)$, $S_{1,2}$, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$. Доказать, что расширить дальше $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ уже невозможно.

2) Начнем теперь с четырех точек общего положения в $\mathbb{P}^3$. Следующим многообразием будет "тетраэдр" $v_4(\mathbb{P}^1)$, а дальше возможны различные варианты: $S_{2,2}$, $v_2(\mathbb{P}^2)$ или $S_{1,3}$.

Задача 1. Доказать, что расширить дальше $v_2(\mathbb{P}^2)$ уже не удастся.

Известно, что скроллы $S_{1,3}$ и $S_{2,2}$ могут быть получены, как дважды гиперплоское сечение $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$

Упражнение 2. Понять, что за многообразия находятся "между" скроллами и $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$.

Упражнение 3. Показать, что для полных пересечений $X \subset \mathbb{P}^N$ башня расширений X, $\widetilde{X}$, $\widetilde{\widetilde{X}}$, $\ldots$ оказывается бесконечной.

Задача 4*. Доказать, что башня расширений бесконечна лишь только для полных пересечений.

Задача 5. 1) Рассмотрим scroll $\Sigma \subset \mathbb{G}(N, n)$ и соответствующее ему многообразие $X = V_\Sigma$. Понять, при каких условиях существует его расширение $\widetilde{X}$. Показать, что при этом $\widetilde{X}$ тоже будет scroll'ом, причем соответствующим семейству $\Sigma' \subset \mathbb{G}(N, n+1)$, изоморфному Σ. (Указание: рассмотреть случай, когда $\dim \Sigma < n$.)

2) Доказать, что при $\dim \Sigma < n + 1$ верно и обратное: общее гиперплоское сечение scroll'а $\widetilde{X} = V_{\Sigma'}$, соответствующего $\Sigma' \subset \mathbb{G}(N, n+1)$ тоже является scroll'ом X, причем с изоморфной базой $\Sigma \subset \mathbb{G}(N, n)$.

Заметим, что исходный вопрос можно поставить и наоборот: если имеется проективное многообразие $X^n \subset \mathbb{P}^N$, то что за рациональное отображение $\mathbb{P}^{N*} \dashrightarrow \mathcal{M}$ мы получаем, рассматривая все его гиперплоские сечения? Здесь $\mathcal{M}$ обозначает многообразие модулей общего гиперплоского сечения $Y = X \cap H$, то есть пространство, "параметризующее" все возможные многообразия, в которые можно (плоско) продеформировать Y.

Обратимся теперь к старому классическому вопросу, поставленному знаменитым профессором Кенигсбергского Университета Отто Гессе. Пусть дан однородный многочлен $F(x_0, \ldots, x_N)$. Что можно сказать, если матрица $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ (*гессиан*) вырождена? Сам Гессе предложил доказательство того, что в этом случае можно сделать такую линейную замену координат, что F не будет зависить от одной из переменных. Однако, его доказательство не прошло испытание временем, и в нем была найдена ошибка при $N \geq 4$ и доказано существование контрпримера.

На нашем геометрическом языке все это очень естественно формулируется следующим образом. Дана проективная гиперповерхность $X^n \subset \mathbb{P}^N$, и известно, что у отображения Гаусса $\gamma : \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^{N*}$, поднятого до всего $\mathbb{P}^N$ по формуле $x \mapsto (\frac{\partial F}{\partial x_0} : \ldots : \frac{\partial F}{\partial x_n})$, везде вырожден дифференциал. Означает ли это, что X является конусом?

Рассмотрим $X = (S_{1,2})^* \subset \mathbb{P}^{4*}$.

Упражнение 6. Показать, что любое особое гиперплоское сечение $S_{1,2}$ содержит хотя бы одну прямую-слой. Вывести отсюда, что $\deg(X) = 3$, и $X = V_\Sigma$, где $\Sigma = v_3(\mathbb{P}^1)^* \subset \mathbb{G}(\mathbb{P}^{4*}, 1)$. Показать, что $\mathrm{Sing} X \cong \mathbb{P}^2$, где $\mathbb{P}^2$ соответствует гиперплоскостям $\mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^4$, проходящим через пары прямых-слоев.

Упражнение 7. Получить все вышесказанное про X другим способом, используя то, что $S_{1,2}$ является общим гиперплоским сечением $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^5$.

Задача 8. 1) Доказать, что так мы получаем контрпример к тому, что утверждал Гессе, при $N = 4$. Найти $\gamma(\mathbb{P}^4)$.

2) Придумать другие (некубические) контрпримеры в $\mathbb{P}^4$.

Задача 9. 1) Доказать, что для общего гиперплоского сечения $Y = H \cap X$ проективного многообразия $X^n \subset \mathbb{P}^N$ верно, что $Y^* = \pi_p(X^*) \subset (\mathbb{P}^{N-1})^*$, где точка $p \in \mathbb{P}^{N^*}$ соответствует гиперплоскости $H \subset \mathbb{P}^N$.

2) Что можно сказать о многообразии, двойственном к проекции из общей точки данного многообразия?

Вот еще несколько задач на геометрию проективных многообразий.

Определение. Пусть z общая точка на многообразие секущих SX к некоторому проективному многообразию $X^n \subset \mathbb{P}^N$. Многообразие

$$Y_z = \overline{\{x \in X | \exists y \in X, y \neq x, z \in < x, y >\}}$$

называется *entry locus.*

Упражнение 10. Доказать, что $\dim SX = 2n + 1 - \dim Y_z$.

Упражнение 11. 1) Пусть $X = \mathbb{G}(n, 1)$. Показать, что тогда entry locus равен $\mathbb{G}(3, 1)$.

2) Доказать, что для многообразия Сегре $\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^b$ entry locus является квадрикой.