Лекция 2. Классификация расслоений

Основная задача:

- "сколько" расслоений? (описание $\mathrm{Vect}(X)$);
- когда расслоения изоморфны или неизоморфны?

Теорема. $\boxed{\mathrm{Vect}_n(\mathbb{S}^m) = [\mathbb{S}^{m-1}, \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})]} \equiv \quad \pi_{m-1}\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$

гомотопическая группа
можно $\mathbf{U}$ вместо $\mathbf{GL}$

Пример. $\mathrm{Vect}_1(\mathbb{S}^2) = \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow$ расслоения с функцией перехода z^k попарно неизоморфны

Упражнение.

$T\mathbb{S}^2$ комплексное одномерное расслоение $I(v) = \left\{ \text{поворот } v \text{ на } \pi/2 \text{ в слое} \right\}$ $\Rightarrow$ $T\mathbb{S}^2$ отвечает функции перехода z^2 $\Rightarrow$ $T\mathbb{S}^2$ — нетривиально $\Rightarrow$ теорема о еже: ежа нельзя причесать

Лемма $\boxed{\begin{array}{l} E \in \mathrm{Vect}(B \times [0,1]) \\ B \text{ — комп. хаусд.} \end{array}} \Longrightarrow \boxed{E|_{B\times\{0\}} \simeq E|_{B\times\{1\}}}$

Док-во. Обозначим $E_t = E|_{B\times\{t\}}$.

1. достаточно доказать, что $\forall t_0 \ \ \exists \varepsilon$:

$$E_{t_0} \simeq E_t \qquad \forall t: \quad |t - t_0| < \varepsilon;$$

2. рассмотрим E и $p^*E_{t_0}$, где $p : B \times [0,1] \to B$.

$$\boxed{\begin{array}{c} E \text{ и } p^*E_{t_0} \text{ изоморфны} \\ \text{на подмножестве } B \times \{t_0\} \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{c} \exists \text{ продолжение } E \longrightarrow p^*E_{t_0}, \text{ которое} \\ \text{остается изоморфизмом в окрестности } B \times \{t_0\} \end{array}$$

□

Следствия

1. $\boxed{\begin{array}{c} \text{гомотопия } f_t : X \longrightarrow B, \\ t \in [0,1] \end{array}} \Rightarrow f_0^*E \simeq f_1^*E$

2. $\boxed{X \text{ — стягиваемо}} \Rightarrow \mathrm{Vect}(X) = \mathbb{Z}_+$ (размерность)

3. $\boxed{X \sim Y - \begin{array}{c} \text{гомотопическая} \\ \text{эквивалентность} \end{array}} \Rightarrow \mathrm{Vect}(X) = \mathrm{Vect}(Y)$

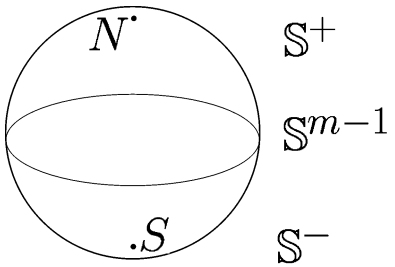
$$\mathrm{Vect}\left(\text{ШАЙБА}\right) = \mathrm{Vect}(\mathbb{S}^1) = \mathrm{Vect}\left(\text{Лист Мёбиуса}\right)$$

4. Если функции склейки $\varphi_{\alpha\beta}$ гомотопны, то расслоения изоморфны.

Доказательство теоремы $\mathrm{Vect}_n(\mathbb{S}^m) = [\mathbb{S}^{m-1}, \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})]$

1) $\boxed{\Rightarrow}$

$$E \in \mathrm{Vect}_n(\mathbb{S}^m)$$
$$\Downarrow$$
$$E|_{S^\pm} \overset{\psi_\pm}{\simeq} S^\pm \times \mathbb{C}^n$$



функция перехода:
$\psi_+\psi_-^{-1} : \mathbb{S}^{m-1} \longrightarrow \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$

$\Longrightarrow$

корректно определено отображение
$\boxed{E \longmapsto \psi_+\psi_-^{-1}}$

2) $\boxed{\Leftarrow}$ $\varphi : \mathbb{S}^{m-1} \to \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ используем как функцию склейки

$$E \equiv S^+ \times \mathbb{C}^n \bigsqcup S^- \times \mathbb{C}^n \Big/ \sim$$
$$(x,v) \sim (x, \varphi(x)v)$$

□

Обобщение

надстройка $\Sigma X = \Big\{\{X \times [0,1]\} \Big/ X \times \{0\}\Big\} \Big/ X \times \{1\}$

$$\boxed{\mathrm{Vect}_n(\Sigma X) = [X, \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})]}$$

Многообразия можно задавать уравнениями

Теорема Уитни: $\forall M$ существует вложение $M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$

Какими уравнениями определять расслоения?

Язык проекторов

Предложение

1) $P(x) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — непрер. семейство проекторов $P^2 = P = P^*$ $\Rightarrow$ $\operatorname{Im} P \subset X \times \mathbb{C}^n$ — векторное расслоение

2) $E \in \operatorname{Vect}(X)$ $\Rightarrow$ $\exists$ семейство $P(x) : E \simeq \operatorname{Im} P$

Док-во. 1) надо проверить локальную тривиальность $\operatorname{Im} P$:

Пусть $e_1, \dots, e_k$ — базис $\operatorname{Im} P(x_0)$ $\Rightarrow$ $Pe_1, \dots, Pe_k$ — линейно-незав. в U_{x_0} $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $Pe_1, \dots, Pe_k$ — базис сечений $\operatorname{Im} P$ в U_{x_0}

(*) здесь пользуемся локальным постоянством ранга проекторов.

2) покрытие $X = \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$. В U_α тривиализация $s : E|_{U_\alpha} \simeq X \times \mathbb{C}^k$

$\Longrightarrow$ $\varphi : E \longrightarrow X \times \mathbb{C}^{kN}$, $e \longmapsto (\chi_1 s_1(e), \dots, \chi_N s_N(e))$ — разбиение единицы $\chi_1 \dots \chi_N$

$\operatorname{Im} \varphi \simeq E$ — векторное расслоение.

Предложение

Расслоения изоморфны $E_1 = E_2$	$\Leftrightarrow$	проекторы гомотопны $P_1 \oplus 0 \sim P_2 \oplus 0$

Док-во.

$\boxed{\Leftarrow}$ $P = \{P_t\}_{t\in[0,1]} \Rightarrow \operatorname{Im} P \in \operatorname{Vect}(X \times [0,1])$

$$\Downarrow$$

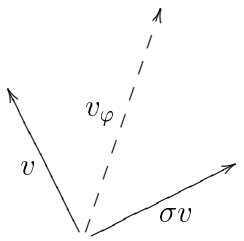
$$\operatorname{Im} P_1 \simeq \operatorname{Im} P_0$$

$\boxed{\Rightarrow}$ $E_1 \overset{\sigma}{\simeq} E_2 \qquad E_1 \simeq \operatorname{Im} P_1 \qquad E_2 \simeq \operatorname{Im} P_2$

$$P_1 = \left(\begin{array}{c|c} \boxed{*} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \quad P_2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \boxed{*} \end{array}\right)$$

$P_\varphi = P_1 \cos^2\varphi + P_2 \sin^2\varphi + \cos\varphi \sin\varphi(\sigma P_1 + \sigma^{-1} P_2)$
$\varphi \in [0, \pi/2]$

$v \in \operatorname{Im} P_1$ поворачивается
в сторону $\sigma v \in \operatorname{Im} P_2$
на угол $\varphi \in [0, \pi/2]$



Приложение На многообразии

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Vect}(M) & = & \operatorname{Vect}^\infty(M) \\ \text{непрерывные} & & \text{гладкие} \end{array}$$

$$\boxed{\text{проектор ранга } k} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l}\text{подпространство в } \mathbb{C}^n \\ \text{размерности } k\end{array}}$$

Грассманиан: $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^\infty) = \left\{ \begin{array}{c} \text{множество всех } k\text{-мерных} \\ \text{подпространств в } \mathbb{C}^\infty \end{array} \right\}$

Следствие $\qquad \boxed{\mathrm{Vect}_k(X) \simeq [X, \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^\infty)]}$

$$E \simeq \mathrm{Im}\, P \Rightarrow \quad x \mapsto \mathrm{Im}\, P(x) \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^\infty)$$

классифицирующее отображение

геометрически:

- над грассманианом *универсальное расслоение*

$$\gamma_k \in \mathrm{Vect}_k(\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^\infty))$$

- $\forall E \in \mathrm{Vect}(X) \Rightarrow \boxed{E \simeq f^*\gamma_k}$ для некоторого $f : X \longrightarrow \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^\infty)$
- $E \simeq E' \quad \Longleftrightarrow \quad f$ гомотопно f'

Приложения

1. $\mathrm{Vect}_1(X) = [X, \mathbb{CP}^\infty] = [X, K(\mathbb{Z}, 2)] = H^2(X, \mathbb{Z})$
2. $[X, \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^N)] = [X, \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^\infty)]$ при $N \gg \dim X$

Определение K-групп

полугруппу $\mathrm{Vect}(X)$ сложно вычислять	$\longrightarrow$	введем более простой объект группу $K(X)$

Тривиальный случай

$$\mathrm{Vect}(pt) = \underbrace{\mathbb{Z}_+}_{\text{полугруппа}} \subset \underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{группа}}$$

множество разностей $[E]-[F]; E, F \in \mathrm{Vect}(X)$

Опр. $\boxed{E - F \sim E' - F'} \Longleftrightarrow \boxed{\exists G : E \oplus F' \oplus G \simeq F \oplus E' \oplus G}$

Опр. $\boxed{K(X) = \mathrm{Vect}(X) \times \mathrm{Vect}(X)/\sim \\ \text{— } \textit{группа Гротендика}}$ — элементы — *виртуальные расслоения*

- группа: $-(E-F) = F - E$;
- кольцо: $(E-F)(G-H) = E \otimes G \oplus F \otimes H - E \otimes H \oplus F \otimes G$

Примеры

1. $X = pt \implies \mathrm{Vect}(pt) = \mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Z} = K(pt)$
2. $X = \mathbb{S}^2$

$$\mathrm{Vect}^{\mathbb{R}}(\mathbb{S}^2) \to K^{\mathbb{R}}(\mathbb{S}^2)$$

не инъективно

$$[T\mathbb{S}^2] = [\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2], \text{ но } T\mathbb{S}^2 \neq \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$$

Простейший вид элементов:

$\forall [E]-[F] = [E'] - [\mathbb{C}^N]$ для некоторого E'

Док-во. $\exists F^\perp : F \oplus F^\perp \simeq \mathbb{C}^N \Rightarrow$

$$[E]-[F] = [E \oplus F^\perp] - [\mathbb{C}^N].$$

Что означает $[E]=[F]$ для E и F?

$$[E] = [F] \Longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} E \text{ — } \textit{стабильно изоморфно } F \\ \exists n : E \oplus \mathbb{C}^n \simeq F \oplus \mathbb{C}^n \end{array}}$$

Док-во. **Упражнение**.

Замечание. если $\dim E \gg \dim X$, то можно брать $n = 0$.

K-функтор

X	$\longmapsto$	$K(X)$
пространство		абелева группа

контравариантность: $f : X \longrightarrow Y \quad \Longrightarrow f^* : K(Y) \longrightarrow K(X)$

Точная последовательность пары:

$\boxed{Y \subset X \text{ — пара}} \Longrightarrow Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} X/Y$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{не точна!}\\ \dim \nrightarrow 0\end{array}} : K(Y) \xleftarrow{i^*} K(X) \xleftarrow{j^*} K(X/Y)$$

Отмеченная точка $x_0 \in Y \subset X$

Приведенная группа:

$$K(X, x_0) = \ker\{K(X) \longrightarrow K(x_0)\} \Big| K(X) = K(X, x_0) \oplus \mathbb{Z}$$

Относительная группа

$K(X, Y) = K(X/Y, Y/Y)$

Лемма $\boxed{\begin{array}{l}K(Y, x_0) \xleftarrow{i^*} K(X, x_0) \xleftarrow{j^*} K(X, Y)\\ \text{— точная последовательность}\end{array}}$ $(*)$

Док-во. 1) $i^* j^* = (ji)^* = 0 \Rightarrow$ у нас комплекс;

2) точность: пусть $i^*([E] - n) = 0 \Longrightarrow E|_Y \simeq \mathbb{C}^n$

$$\Longrightarrow E|U_Y \overset{\alpha}{\simeq} \mathbb{C}^n$$

Определим: $\widetilde{E} = E|_{X-Y} \bigcup\limits_{\alpha} (U_Y \times \mathbb{C}^n) \Rightarrow j^*[\widetilde{E}] - n = E - n$ $\square$

$\boxed{\text{Мы хотим продолжить последовательность } (*)}$

Основная идея

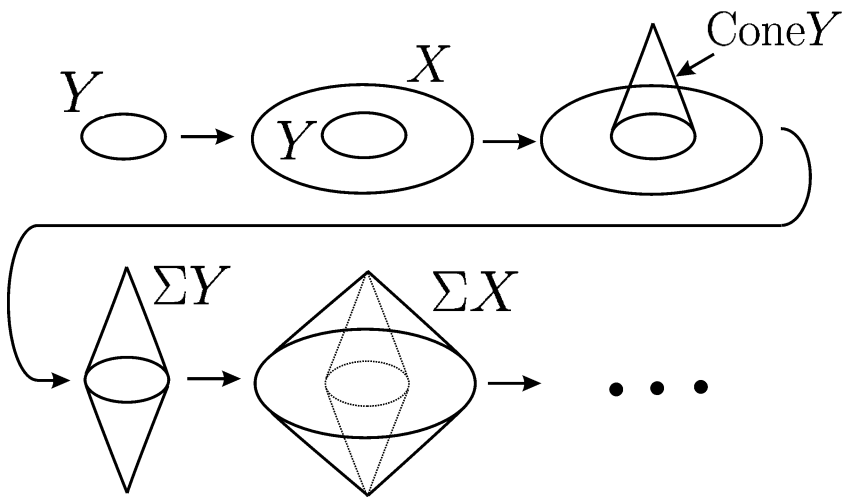
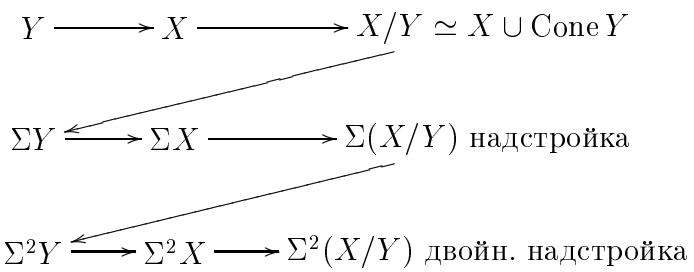


Рис. 1. Последовательность пространств и отображений.



Более точно:

X — с отмеченной точкой

$$\Sigma^n X = \mathbb{S}^n \times X/(\mathbb{S}^n \bigvee X)$$

n-я приведенная надстройка

$$\mathbb{S}^n \bigvee X = \mathbb{S}^n \times \{x_0\} \cup pt \times X$$

Свойства:

1) $X \to Z \Rightarrow \Sigma^k X \to \Sigma^k Z$;

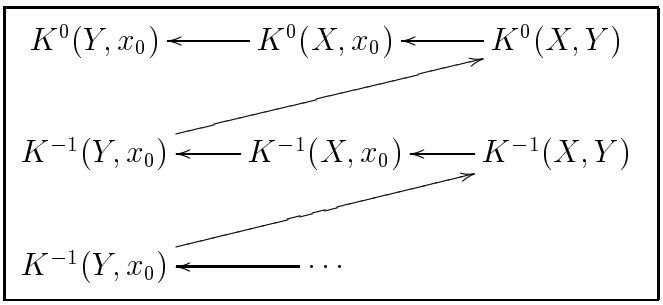
2) $\Sigma^{k+l} = \Sigma^k \Sigma^l$.

Примеры: $\Sigma^n pt = pt, \quad \Sigma \mathbb{S}^n = \mathbb{S}^{n+1}$

Высшие K-группы

$K^{-n}(X,Y) \stackrel{def}{=} K(\Sigma^n(X/Y), \Sigma^n(Y/Y))$

Теорема. Пара (X,Y) определяет точную последовательность:



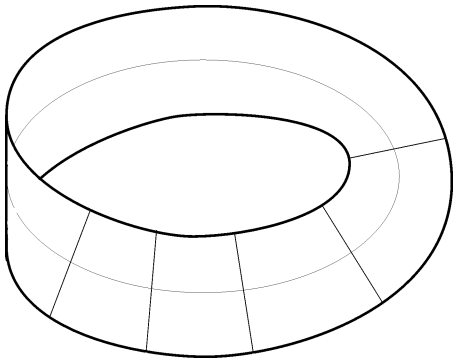
— точная последовательность пары в K-теории

Идея док-ва:

1. для $Y \to X \to X/Y$ (*) точность уже знаем
2. во всех членах можем заменить пространства на гомотопически эквивалентные и отображения индуцированы (*).

Приложение $K(\mathbb{RP}^2) = ?$

M — лист Мёбиуса
$\mathbb{S}^1 \subset M \to M/\mathbb{S}^1 = \mathbb{RP}^2$



$$\begin{array}{ccccccccc}
\widetilde{K}(\mathbb{S}^1) & \leftarrow & \widetilde{K}(M) & \leftarrow & \widetilde{K}(\mathbb{RP}^2) & \leftarrow & K^{-1}(\mathbb{S}^1) & \leftarrow & K^{-1}(M) \\
\| & & \| & & & & & & \\
0 & \leftarrow & 0 & \leftarrow & G & \leftarrow & \widetilde{K}(\mathbb{S}^2) & \leftarrow & \widetilde{K}(\mathbb{S}^2)
\end{array}$$

1) $K(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ — размерность;
2) $\widetilde{K}(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$: $\quad \mathrm{Vect}_k(\mathbb{S}^2) = \pi_1(\mathbf{U}(k)) = \mathbb{Z}$

число вращения детерминанта

Прямое вычисление

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{K}(\mathbb{S}^2) & \longleftarrow & \widetilde{K}(\mathbb{S}^2) \\
\| & & \| \\
\mathbb{Z} & \xleftarrow{\times 2} & \mathbb{Z}
\end{array} \quad \Rightarrow \boxed{G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2}$$

$$K(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$$

Подсказка. Умножение на 2 связано с тем, что граница листа Мёбиуса даёт дважды образующую его фундаментальной группы.