Лекция 3. Периодичность Ботта

Прошлый раз: точная последовательность

$$Y \subset X \to X/Y$$

$$K^0(Y,x_0) \longleftarrow K^0(X,x_0) \longleftarrow K^0(X,Y)$$

$$K^{-1}(Y,x_0) \longleftarrow K^{-1}(X,x_0) \longleftarrow K^{-1}(X,Y)$$

$$K^{-1}(Y,x_0) \longleftarrow \cdots$$

$K(X,x_0) = \ker\{K(X) \to K(x_0)\}$

$K(X,Y) = K(X/Y, Y/Y)$

$K^{-n}(X,Y) = K(\Sigma^n(X/Y), \Sigma^n(Y/Y))$

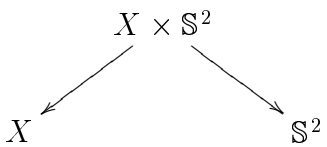
$\Sigma^n X$ — n-я надстройка

Теорема (периодичность Ботта)

(*) $\boxed{\begin{array}{ccc} K(X)\oplus K(X) & \longrightarrow & K(X\times\mathbb{S}^2) \\ u \quad v & \mapsto & u\otimes 1 + v\otimes\beta \end{array}}$ — изоморфизм

- $1, \beta \in K(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, β — расслоение Хопфа;
- $\otimes$ — тензорное произведение

$$K(X)\times K(\mathbb{S}^2) \longrightarrow K(X\times\mathbb{S}^2)$$



Док-во.

Шаг 0. Отщепление тривиального слагаемого

$$\boxed{K(X\times\mathbb{S}^2)=K(X)\oplus K(X\times\mathbb{S}^2)/\pi^*K(X)} \qquad \begin{array}{c} X\times\mathbb{S}^2 \\ \downarrow\pi \\ X \end{array}$$

В этом представлении $(*)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

$$\beta : K(X)\longrightarrow K(X\times\mathbb{S}^2)/\pi^*K(X)$$

Построим β^{-1}

$E\in \mathrm{Vect}(X\times\mathbb{S}^2)$

$E=\left\{\begin{array}{c}\text{склейка двух}\\ \text{тривиальных}\\ \text{расслоений}\\ \text{на полусферах}\end{array}\right\}$

$E=\mathbb{C}^n\cup_{f(x,z)}\mathbb{C}^n$

$f(x,z): X\times\mathbb{S}^1\longrightarrow \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$

для элемента из $\mathrm{Im}\,\beta$ функция склейки линейна, см.(**): $f(x,z)=A+Bz$

для *общего расслоения* на $X\times\mathbb{S}^2$ непрерывная функция склейки $f(x,z)$

$G=\mathrm{Im}\,B_0\in\mathrm{Vect}(X)$, B_0 — проектор

$G\otimes\beta\sim f(x,z)=B_0z+1-B_0$ $(**)$

Доказательство состоит в явной деформации $f(x,z)$ к виду (**)

Шаг 1. **Сглаживание**

$f(x,z)$ непрерывна по z	$\longmapsto$	$f_\epsilon(x,z)$ — гладкая ε-аппроксимация по z

Шаг 2. **Редукция к полиному**

$$f(x,z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}u_k(x)z^k \longmapsto \sum_{-N}^{+N}u_k(x)z^k = z^{-N}\underbrace{\sum_{0}^{2N}b_k(x)z^k}_{p(z)}$$

$z^{-N}p(z)\oplus 1 \sim z^{-N}\oplus p(z)$

z^{-N} отвечает элем.$\beta(-[\mathbb{C}^N])$

$$\begin{pmatrix} ab & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$$

Док-во: гомотопия

$$\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}U_\varphi\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}U_\varphi^{-1}$$

$$U_\varphi=\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

Шаг 3. **Редукция к линейной функции**

$$I=\underbrace{\begin{pmatrix} p(z) & 0 & \dots\\ 0 & 1 & \dots\\ \dots & \dots & \ddots\end{pmatrix}}_{(2N+1)n\times(2N+1)n}\sim\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots\\ -z & 1 & 0 & \dots\\ 0 & -z & 1 & \dots\\ 0 & \dots & \dots & \ddots\end{pmatrix}=II$$

Док-во: 1. Тождество

$$II=\begin{pmatrix} 1 & f_1 & f_2 & \dots\\ 0 & 1 & 0 & \dots\\ 0 & 0 & 1 & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \ddots\end{pmatrix}I\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots\\ -z & 1 & 0 & \dots\\ 0 & -z & 1 & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \ddots\end{pmatrix}\qquad (*)$$

$$f_0=f,\quad f_{r+1}=\frac{f_r(z)-f_r(0)}{2}$$

2. Теперь

гомотопия с параметром t от I к II	$=$	умножение элементов вне диагонали в правой части (*) на t

Шаг 4. **Простейший вид линейной функции**

$f(z) = A + Bz$ и можно считать $f(1) = 1$

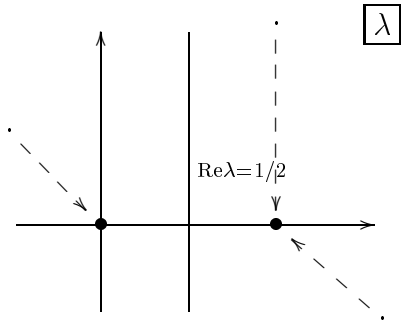
$$\Longrightarrow \quad f(z) = Bz + 1 - B$$

$$\boxed{f(z) \text{ — обратима на } \mathbb{S}^1} \Longleftrightarrow \boxed{\operatorname{Spec} B \cup \{\operatorname{Re}\lambda = 1/2\} = \emptyset}$$

Обозн. $B_0 = \left\{ \begin{array}{c} \text{проектор на обобщенные} \\ \text{собств. подпространства} \\ \text{с } \operatorname{Re}\lambda > 1/2 \end{array} \right\}$

$$B_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{d\lambda}{\lambda - B}$$

Сдвинем полюса $\lambda \in \mathbb{C}$ к 0 и 1:



Гомотопия (от B к B_0) $\quad B_\tau = \tau B + (1-\tau)B_0$

$$f_\tau(z) = B_\tau z + 1 - B_\tau$$

$$\boxed{f_0(z) = B_0 z + 1 - B_0}$$

на $X \times \mathbb{S}^2$ определяет расслоение $\operatorname{Im} B_0 \otimes \gamma \oplus \pi^* \ker B_0$

здесь $\gamma \in \operatorname{Vect}(\mathbb{S}^2)$ — расслоение Хопфа

Окончание доказательства (обратное к β)

$$K(X \times \mathbb{S}^2)/\pi^* K(X) \xrightarrow{\beta'} K(X)$$

$$E \mapsto f(x,z) \mapsto z^{-N}(B_0 z + 1 - B_0) \mapsto [\operatorname{Im} B_0] - [\mathbb{C}^N]$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \beta \text{ — сюръективно} \\ \beta'\beta = Id \end{array}} \Longrightarrow \boxed{\beta' = \beta^{-1}}$$

□

Применение теоремы

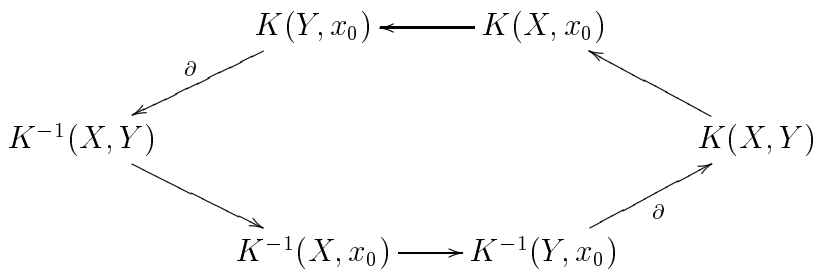
$$K^{-2}(X, x_0) = K(\Sigma^2 X, \Sigma^2 x_0) = K(X \times \mathbb{S}^2, x_0 \times \mathbb{S}^2 \cup X \times pt) =$$
$$\overset{\text{Лемма 1}}{=} K(X \times \mathbb{S}^2)/\pi^* K(X) \oplus K(\mathbb{S}^2, pt) \overset{\text{периодичн.}}{=} K(X, x_0)$$

Лемма 1.

Если $Y \subset X$ — *ретракт*
$(\exists r : X \to Y : r \circ i = Id_Y)$
$\Downarrow$
$\boxed{K(X) = K(X, Y) \oplus K(Y)}$

Определим $\forall i \in \mathbb{Z} \quad K^i(X, Y) = K^{i-2N}(X, Y), \quad i - 2n < 0$

Периодическая последовательность



Периодичность Ботта и сферы

$$\left.\begin{array}{l} K(S^0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ K(S^1) = \mathbb{Z} \\ K(S^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ K(S^3) = \mathbb{Z} \\ K(S^4) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ \dots \end{array}\right\} \text{ период } 2$$

$$\mathbb{S}^n = \Sigma^2 \mathbb{S}^{n-2} \Rightarrow K(\mathbb{S}^n, pt) = \boxed{K^{-2}(\mathbb{S}^{n-2}, pt) \overset{\text{период.}}{=} K(\mathbb{S}^{n-2}, pt)}$$

$$\begin{array}{ccc} K(\mathbb{S}^n, pt) & \simeq & K(\mathbb{S}^{n+2}, pt) \\ \| & & \| \end{array}$$

$$\boxed{\pi_{n-1}(\mathbf{U}(\infty)) \simeq \pi_{n+1}(\mathbf{U}(\infty))}$$

В такой форме Ботт впервые
получил периодичность

Неудобства:

- надо отмечать точку;
- нельзя рассматривать некомпактные пространства

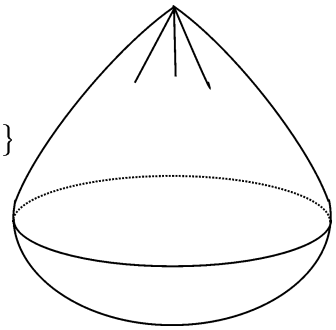
K-группы с компактными носителями

$$\boxed{X - \begin{array}{c}\textit{локально}\\ \textit{компактно}\end{array}} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\textit{одноточечная}\\ \textit{компактификация}\end{array} \quad X^+ = X \cup \{+\}}$$

Примеры

1) X — компактно $\Rightarrow X^+ = X \sqcup \{+\}$

2) $(\mathbb{R}^n)^+ = \mathbb{S}^n$



$$\boxed{K_c(X) = \ker\Big\{K(X^+) \longrightarrow K(\{+\})\Big\}} = K(X), \text{ если } X - \text{компактно}$$

На этом языке можно переписать все объекты

Упражнения:

1. $K_c(X, Y) = K_c(X \setminus Y)$
2. $K_c^{-n}(X) = K_c(X \times \mathbb{R}^n)$
3. *периодичность* $\qquad K_c(X) \simeq K_c(X \times \mathbb{R}^2)$

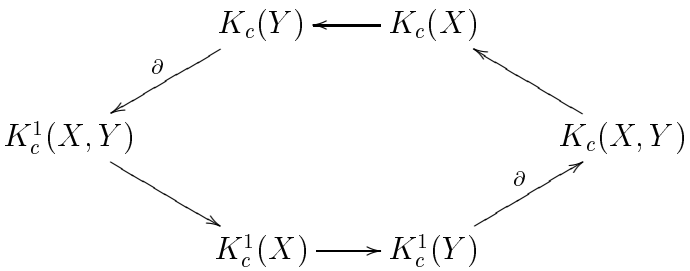
Пояснения:

1) $(X \setminus Y)^+ = X/Y$

3) $(X \times \mathbb{R}^2)^+ = X \times \mathbb{S}^2 \Big/ X \times pt \Rightarrow$

$$K_c(X \times \mathbb{R}^2) = K(X \times \mathbb{S}^2)/K(X) = K(X)$$

Точная последовательность



Каков явный вид объектов и отображений?

- $K(X)$ — векторные расслоения
- $K^1(X) = K(\Sigma X, pt) = [X, \mathbf{GL}(N, \mathbb{C})]$

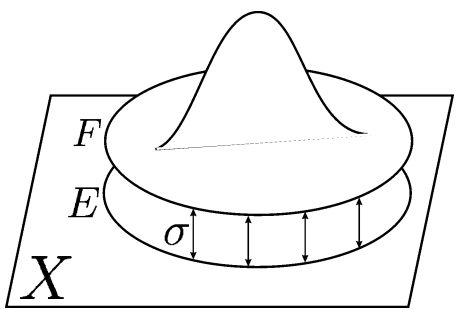
  — обратимые семейства матриц
- $K(X,Y) = K_c(X \setminus Y) \sim ?$

Геометрическое описание групп $K_c(X)$

Разностная конструкция

Рассматриваем тройки (E, F, σ)

$E, F \in \mathrm{Vect}(X)$
$E|_{X\setminus K} \overset{\sigma}{\simeq} F|_{X\setminus K}$
— изоморфизм
вне компакта K



тривиальные тройки

σ — продолжается
до изоморфизма всюду: $E \simeq F$

гомотопии

(E, F, σ_t)

стабильная гомотопия

$\mathcal{E} \sim \mathcal{F} \Leftrightarrow$ $\exists \mathcal{E}_{triv}, \mathcal{F}_{triv}$:
$\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}_{triv}$ гомотопна $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}_{triv}$

$$L(X) = \left\{ \text{ тройки } \right\} \Big/ \left\{ \begin{array}{c} \text{стабильные} \\ \text{гомотопии} \end{array} \right\}$$

$L(X)$ — группа: $-(E, F, \sigma) = (F, E, \sigma^{-1})$ обратный элемент

Док-во: используем гомотопию $\begin{pmatrix} 0 & \sigma^{-1} \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Разностная конструкция

$\boxed{\chi : L(X) \longrightarrow K_c(X)}$ если X — компактно $\Rightarrow$

$$\chi(E, F, \sigma) = [E] - [F]$$

$(E, F, \sigma) \mapsto (E \oplus F^\perp, F \oplus F^\perp, \sigma \oplus 1) \mapsto$ можно склеить $E \oplus F^\perp$ с $\mathbb{C}^N$ на ∞-ти

где $F \oplus F^\perp \simeq \mathbb{C}^N$

$$\chi(E, F, \sigma) = [E \oplus F^\perp \bigcup_{\sigma \oplus 1} \mathbb{C}^N] - [\mathbb{C}^N] \in K(X^+)$$

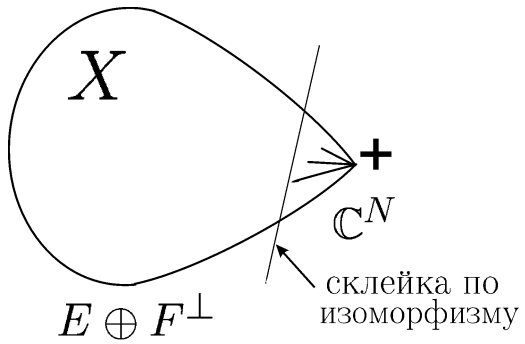


Рис. 1. Подклейка тривиальн. расслоения на ∞

Предл. $\boxed{\chi \text{ — корректно определено и изоморфизм}}$

Примеры

1. $\boxed{(\mathbb{C}, \mathbb{C}, z)} \Rightarrow$ *элемент Ботта* $b \in K_c(\mathbb{R}^2) \subset K(\mathbb{S}^2)$
$b = [\gamma] - 1$, здесь γ — расслоение Хопфа

2. отображения точной последовательности

$$\begin{array}{ccccc} K^1(Y) & \longrightarrow & K(X, Y) & \longrightarrow & K(X) \\ \sigma & \mapsto & (\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n, \sigma) & & \\ & & (E, F, \sigma) & \mapsto & [E] - [F] \end{array}$$

Обобщение (комплексы)

$$0 \to E^0 \xrightarrow{d_0} E^1 \xrightarrow{d_1} \ldots \to E^n \to 0 \qquad (*)$$

E^i — расслоения на X

d_i — гомоморфизмы

$$L^n(X) = \left\{ \begin{array}{c} \text{комплексы точные} \\ \text{вне компакта} \end{array} \right\} \Big/ \left\{ \begin{array}{c} \text{стабильные} \\ \text{гомотопии} \end{array} \right\}$$

Предл. $\boxed{L^n(X) \overset{\chi}{\simeq} K_c(X)}$

Сворачивание комплекса

$$E^{ev} = \bigoplus_i E^{2i}, \quad E^{odd} = \bigoplus_i E^{2i+1}, \quad d_i^* : E^{i+1} \to E^i$$

$$(*) \longmapsto \boxed{\begin{array}{c} 0 \to E^{ev} \xrightarrow{d+d^*} E^{odd} \to 0 \\ \text{— изоморфизм вне компакта} \end{array}}$$

$$\begin{array}{c} E^1 \\ E^3 \\ E^5 \\ E^7 \end{array} \begin{pmatrix} d_0 & d_1^* & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & d_3^* & 0 \\ 0 & 0 & d_4 & d_5^* \\ 0 & 0 & 0 & d_6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} E^0 \\ E^2 \\ E^4 \\ E^6 \end{array}$$