Лекция 4. Изоморфизм Тома

Изоморфизм Тома

$\boxed{\boxed{K_c(X) \simeq K_c(E)}}$ $\qquad$ $\boxed{\begin{array}{c} E \text{ — комплексное векторное} \\ \text{расслоение над } X \end{array}}$

Частный случай. X — компактно

$$\boxed{\begin{array}{lcl} t_E : K(X) & \longrightarrow & K_c(E) \\ G & \mapsto & [\pi^* G] \cdot [D_E] \end{array}} \qquad \pi : E \to X$$

- t_E — *гомоморфизм Тома*
- $[D_E] \in K_c(E)$ — *класс Тома*
- $K_c(E)$ является $K(X)$-модулем

комплекс де Рама на пространстве E

$$0 \longrightarrow \pi^*\Lambda^0(E) \xrightarrow{d} \pi^*\Lambda^1(E) \xrightarrow{d} \pi^*\Lambda^2(E) \xrightarrow{d} \dots$$

$$d\omega(e) = e \wedge \omega(e), \qquad e \in E, \omega \in \pi^*\Lambda^k(E)$$

$\Downarrow$ свёртываем комплекс

$$\boxed{D_E : \pi^*\Lambda^{ev}(E) \xrightarrow{d+d^*} \pi^*\Lambda^{odd}(E)} \leftarrow \text{обратим вне нулевого сечения}$$

$$\Lambda^{ev}(E) = \Lambda^0(E) \oplus \Lambda^2(E) \oplus \dots$$

$$\Lambda^{odd}(E) = \Lambda^1(E) \oplus \Lambda^3(E) \oplus \dots$$

Примеры $X = pt$

1) $E = \mathbb{C} \implies$

$K_c(pt)$	$\simeq$	$K_c(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$
$k \in \mathbb{Z}_+$	$\mapsto$	$k\left(\mathbb{C} \xrightarrow{z} \mathbb{C}\right)$

$e \in \mathbb{C}, e \neq 0 \implies$ Комплекс де Рама: $0 \to \mathbb{C} \cdot 1 \xrightarrow{ze} \mathbb{C}e \to 0$

2) $E = \mathbb{C}^2$, базис e, f, $v = ze + wf$

$K_c(pt)$	$\simeq$	$K_c(\mathbb{C}^2)$
$k \in \mathbb{Z}_+$	$\mapsto$	$k\left(\begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2\right)$

формула получается из следующего упражнения

Упражн. В базисе $1, e, f, e \wedge f$ в $\Lambda(\mathbb{C}^2)$

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -w & z & 0 \end{pmatrix} \qquad d^* = \begin{pmatrix} 0 & \overline{z} & \overline{w} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\overline{w} \\ 0 & 0 & 0 & \overline{z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d + d^* = \begin{pmatrix} & & \\ z & & -\overline{w} \\ w & & \overline{z} \\ & & \end{pmatrix} : \Lambda^0(\mathbb{C}^2) \oplus \Lambda^2(\mathbb{C}^2) \to \Lambda^1(\mathbb{C}^2)$$

Общий случай (X может быть некомпактным)

$$t_E : K_c(X) \longrightarrow K_c(E)$$

$$G \xrightarrow{\sigma} H \quad \mapsto \quad \sigma\#D_E : \begin{matrix} G\otimes\Lambda^{ev}(E) \\ \oplus \\ H\otimes\Lambda^{odd}(E) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H\otimes\Lambda^{ev}(E) \\ \oplus \\ G\otimes\Lambda^{odd}(E) \end{matrix}$$

$$a\#b = \begin{pmatrix} a\otimes 1 & 1\otimes b^* \\ 1\otimes b & -a^*\otimes 1 \end{pmatrix}$$

$\exists a^{-1}, b^{-1}$	$\exists b^{-1}$	$\exists a^{-1}, b^{-1}$
$\exists a^{-1}$		$\exists a^{-1}$
$\exists a^{-1}, b^{-1}$	$\exists b^{-1}$	$\exists a^{-1}, b^{-1}$

некомп по слою

некомпактность по базе

Скрещенное произведение # получается перемножением и свёртыванием комплексов:

$$(0 \to E \xrightarrow{a} F \to 0) \times (0 \to G \xrightarrow{b} H \to 0) =$$

$$= 0 \to E\otimes G \xrightarrow{\begin{pmatrix} a\otimes 1 \\ -1\otimes b \end{pmatrix}} \begin{matrix} F\otimes G \\ \oplus \\ E\otimes H \end{matrix} \xrightarrow{(1\otimes b, a\otimes 1)} F\otimes H \to 0$$

Мультипликативное свойство комплекса де Рама $D_{E\oplus F} = D_E\#D_F$ $\Rightarrow t_{E\oplus F} = t_E t_F$

Док-во. $t_{E\oplus F}(\sigma) = \sigma\#D_{E\oplus F} \simeq \sigma\#(D_E\#D_F) \simeq$

$$\simeq (\sigma\#D_E)\#D_F = t_F(t_E(\sigma)).$$

Теорема. $t_E : K_c(X) \longrightarrow K_c(E)$ — изоморфизм (Тома)

Доказательство.

Применим метод Майера–Вьеториса:

Проверяется, что отображение — изоморфизм над точкой. Тогда глобальный изоморфизм устанавливается, строя индукцию по числу клеток пространства

a) над точкой:

$t_{\mathbb{C}^n} : K_c(pt) \longrightarrow K_c(\mathbb{C}^n) \Rightarrow$

$$t_{\mathbb{C}^n} = (t_{\mathbb{C}})^n, \text{ где } t_{\mathbb{C}} = \beta \text{ — изоморфизм Ботта.}$$

b) шаг индукции:

если $\boxed{t_E \text{ — изоморфизм над } Y}$

тогда $\boxed{\begin{array}{c}\text{изоморфизм над } X = Y \cup_{\varphi} \mathbb{D}^k \\ \text{где } \varphi : \mathbb{S}^{k-1} \to Y\end{array}}$

Последовательности для пары $Y \subset X$:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
K_c^1(X \setminus Y) & \leftarrow & K_c(Y) & \leftarrow & K_c(X) & \leftarrow & K_c(X \setminus Y) & \leftarrow & K_c^1(Y) & \leftarrow \\
\downarrow\simeq & & \downarrow\simeq & & \downarrow ? & & \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq & \\
K_c^1(E|_{X\setminus Y}) & \leftarrow & K_c(E|_Y) & \leftarrow & K_c(E|_X) & \leftarrow & K_c(E|_{X\setminus Y}) & \leftarrow & K_c^1(E|_Y) & \leftarrow
\end{array}$$

По 5-лемме $\Longrightarrow$ **?** — изоморфизм

c) все пространство X можно получить, последовательно приклеивая клетки. $\square$

Приложение

$\boxed{M \text{ — комплексное многообразие}} \Rightarrow \boxed{TM \text{ — комплексное расслоение}} \Rightarrow \boxed{K_c(TM) = K(M)}$

Прямой образ в K-теории

$f : X \longrightarrow Y$

$f^* : K_c(Y) \longrightarrow K_c(X)$
— *обратный образ*

можно ли построить
прямой образ:
$f_* : K_c(X) \longrightarrow K_c(Y)$**?**

Пример 1. $E \in \mathrm{Vect}(X)$ — комплексное расслоение

$\pi : E \longrightarrow X$ — *проекция*

$\pi_* \stackrel{def}{=} t_E^{-1} : K_c(E) \longrightarrow K_c(X)$

$i : X \hookrightarrow E$ — *вложение*

$i_* \stackrel{def}{=} t_E : K_c(X) \longrightarrow K_c(E)$

$E \oplus F \xrightarrow{\pi_F} E \xrightarrow{\pi_E} X$, $\pi_{E\oplus F}$

$(\pi_E)_*(\pi_F)_* = (\pi_E\pi_F)_*$

$X \stackrel{i_E}{\hookrightarrow} E \stackrel{i_F}{\hookrightarrow} E \oplus F$

$(i_F)_*(i_E)_* = (i_F i_E)_*$

Пример 2. $U \stackrel{i}{\hookrightarrow} X$ — вложение открытого подмножества

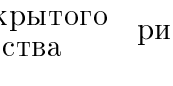


рис.Открытое подмн-во

$i_* : K_c(U) \longrightarrow K_c(X)$

$E \stackrel{\sigma}{\to} \mathbb{C}^n \mapsto E \cup_\sigma \mathbb{C}^n \stackrel{\sigma\cup 1}{\longrightarrow} \mathbb{C}^n$

над U — над X

нетипичный случай: для вложений codim>0 всё сложнее!

комплексная структура важна!

Определение прямого образа

Наблюдение: X — многообразие $\Rightarrow TX$ — почти-комплексное многообразие $z_j = x_j + i\xi^j$

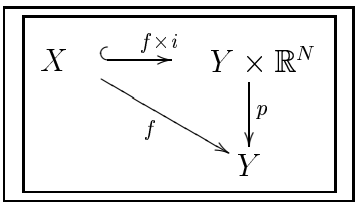
Опр. $\boxed{N \text{ — } \textit{почти-комплексное}} \Longleftrightarrow \boxed{\exists I : TN \to TN, I^2 = -1}$

Задача

отображение $f : X \longrightarrow Y$ где X, Y — гладкие замкнутые многообразия	хотим определить $f_* : K_c(TX) \longrightarrow K_c(TY)$ — *прямой образ*

Метод решения: свести f к композиции вложений и проекций

вложение $i : X \hookrightarrow \mathbb{R}^N \Longrightarrow$



$\Rightarrow f_* = p_*(f \times i)_* : K_c(TX) \longrightarrow K_c(TY)$

- $p_* : K_c(T(Y \times \mathbb{R}^N)) = K_c(TY \times \mathbb{C}^n) \xrightarrow{t_{\mathbb{C}^n}^{-1}} K_c(TY)$
  — *изоморфизм Тома*
- $(f \times i)_*$ — прямой образ для вложения многообразий, который надо определить

Прямой образ для вложений

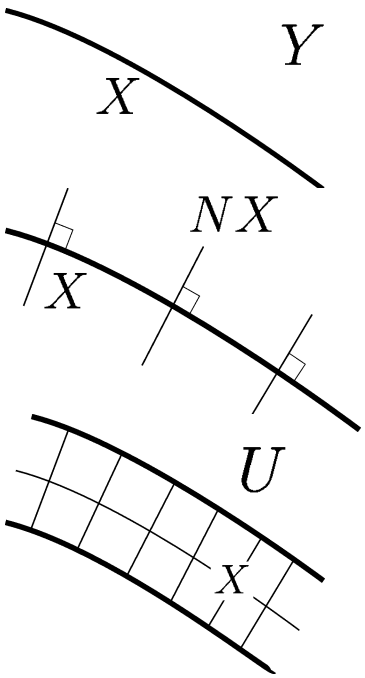
$X \overset{f}{\hookrightarrow} Y$
вложение

$\Downarrow$

нормальное расслоение
$NX \in \mathrm{Vect}(X)$
$TX \oplus NX = TY|_X$

$\Downarrow$

трубчатая окрестность
$X \subset U \subset Y$
$U \simeq NX$



Итак, $X \xrightarrow{j_1} NX \xrightarrow{j_2} Y$, $f = j_2 \circ j_1$

$$f_* : K_c(TX) \xrightarrow{(j_1)_*} K_c(TNX) \xrightarrow{(j_2)_*} K_c(TY)$$

- j_2 — вложение коразмерности 0;
- j_1 — вложение $TX \hookrightarrow TNX$ нулевым сечением.

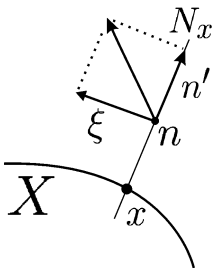
Утверждение. $\boxed{TNX \text{ — комплексное расслоение над } TX}$

Пояснение

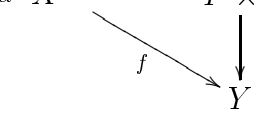
$\boxed{(TNX)_{x,n} = T_xX \oplus N_x}$ - горизонтальное и вертикальное направления в NX

$\Downarrow$

$TNX \longrightarrow TX$
$(x, n, \xi, n') \mapsto (x, \xi)$ $\Longrightarrow$ $\boxed{TNX \simeq p^*(NX \oplus NX)}$, $p : TX \longrightarrow X$



Суммируя: диаграмма $X \hookrightarrow Y \times \mathbb{R}^N$ даёт:



$$K_c(TX) \xrightarrow{\simeq} K_c(TNX) = K_c(TU) \longrightarrow K_c(T(Y \times \mathbb{R}^N)) \xrightarrow{\simeq} K_c(TY)$$

$$f_*$$

Теорема

Прямой образ f_* корректно определен и обладает свойствами:

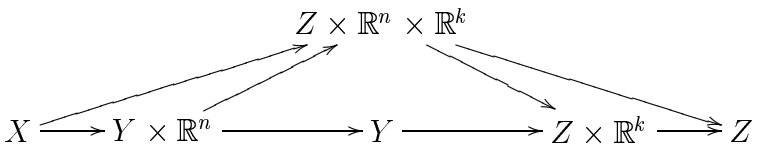
1. $(gf)_* = g_* f_*, \qquad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z;$
2. $f_*(x f^*(y)) = y f_*(x) \qquad x \in K_c(TX),\ y \in K(Y)$

Док-во.

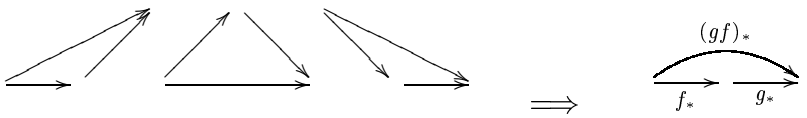
0) **Корректность**. f_* не зависит от:

- метрики;
- трубчатой окрестности;
- вложения в $\mathbb{R}^N$ (и от N).

1) $(gf)_* = g_* f_*$



(все отображения — вложения или проекции)



коммутируют коммутирует

Треугольники коммутируют в силу изоморфизма Тома

2) упражнение. □

Дифференциальные операторы

$$\boxed{\begin{array}{c} A : C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \text{— оператор порядка} \le m, \\ m \in \mathbb{Z}_+ \end{array}} \Longleftrightarrow \boxed{A = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \text{ — мультииндекс}$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \quad \alpha_k \ge 0$$

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = (-i)^{|\alpha|} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$$

Символ оператора

$\boxed{a(x,\xi) = \sum_\alpha a_\alpha(x)\xi^\alpha}$ $\qquad (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \qquad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$

Опр. *главный символ* оператора A

$$\sigma(A) = \boxed{a_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha}$$

Символ	$\longleftrightarrow$	Оператор
ξ	$\leftrightarrow$	$-i\frac{\partial}{\partial x}$

$$(Au)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} a(x,\xi)\widehat{u}(\xi) d\xi$$

$\widehat{u}$ — преобразование Фурье функции u.

главный символ	$\longleftrightarrow$	оператор по модулю младших членов

Свойства главного символа

1) $\boxed{\sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B)}$ $\quad A, B$ — дифференциальные операторы

2) Если $y = y(x)$ — замена переменных, то

$$(Bu)(x) = Au(x(y))\Big|_{y=y(x)}$$

оператор в новых координатах

$$\boxed{\sigma(B)(x,\xi) = \sigma(A)\left(y(x), \xi\frac{\partial x}{\partial y}\right)}$$

Док-во. 1) при вычислении ABu производные коэффициентов не дают вклада в главный символ.

2)

$$\sum a_\alpha \left(-i\frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha u(x(y)) \sim \sum a_\alpha \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\right)^\alpha u$$

$$\sim \sigma(A)\left(y(x), -i\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\right) u$$

□

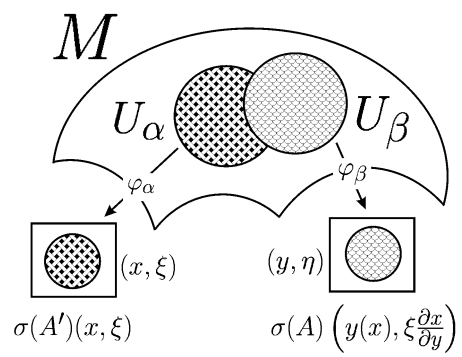
Обозначение: $\sim$ это равенство по модулю младших членов

Следствие $\boxed{A : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M) \text{ — дифференциальный оператор}} \Longrightarrow$ $\boxed{\sigma(A) \text{ — гладкая функция на кокасательном расслоении } T^*M}$

Действительно:

ковектор

$$\boxed{\begin{array}{c} y = y(x) \\ \eta = \xi\frac{\partial x}{\partial y} \end{array}}$$



Уравнение $\boxed{Au = f}$

Будем изучать разрешимость с точностью до конечномерного подпространства

Теория Фредгольма

Опр. $\boxed{\begin{array}{l} F : H_1 \longrightarrow H_2 \text{ — } \textit{фредгольмов} \\ H_1, H_2 \text{ — сепараб. гильбертовы пр-ва.} \end{array}} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \dim \ker F < \infty \\ \dim \operatorname{coker} F < \infty \end{array}}$

Замечание $\operatorname{Im} F$ — замкнут, $\operatorname{coker} F \simeq \ker F^*$ $\qquad$ $\operatorname{coker} F = H_2 / \operatorname{Im} F$

Теорема (Аткинсон)

$$\boxed{F \text{ — фредгольмов}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{F \text{ — } \textit{почти-обратим}}$$

$\exists G : FG - 1$ и $GF - 1$ — компактные операторы

G — *почти-обратный* к F

Док-во:

$\boxed{\Rightarrow}$

$$F = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 \\ 0 & F_0 \end{pmatrix} : \begin{array}{c} \ker F \\ \oplus \\ (\ker F)^\perp \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \ker F^* \\ \oplus \\ (\ker F^*)^\perp \end{array}$$

F_0 — обратим, $\boxed{0}$ — конечномерен $\Longrightarrow G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F_0^{-1} \end{pmatrix}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\qquad GF = 1 + K \Longrightarrow \ker F \subset \underline{\underline{\ker(1+K)}}$

конечномерность основана на:

шар в ∞-мерном пространстве некомпактен

□

Свойства фредгольмовых операторов

Fred — множество всех фредгольмовых операторов

1) $\boxed{\text{Fred} — \begin{array}{c}\text{открытое подмн-во в пространстве} \\ \text{огранич. операторов:}\end{array}}$

$\forall F \in \text{Fred}\ \exists \varepsilon > 0 :$ **если** $\|F - F'\| < \varepsilon$ **то** $F' \in \text{Fred}$

2) $\boxed{F \in \text{Fred} \Longrightarrow F + K \in \text{Fred}, \quad \text{если } K \text{ компактен}}$

Док-во:

2) следует из теоремы Аткинсона,
т.к. компактные операторы образуют идеал;

1) Пусть F^{-1} — почти-обратный, тогда

$$(F+\alpha)^{-1} \overset{F - \text{главн. член}}{=} F^{-1}(1+\alpha F^{-1})^{-1}$$

определен, если $\|\alpha\| < \|F^{-1}\|^{-1}$

□

Индекс фредгольмова оператора

$$\operatorname{ind} F = \dim\ker F - \dim\operatorname{coker} F < \infty$$

Примеры

1) $\operatorname{ind} F = \dim H_1 - \dim H_2$, если $H_{1,2}$ — конечном.

2)
$$\begin{array}{ccc} T : l_2 & \longrightarrow & l_2 \\ (z_1, z_2, \ldots) & \mapsto & (z_2, z_3, \ldots) \end{array} \qquad \operatorname{ind} T = 1$$

Логарифмическое свойство: $\boxed{\operatorname{ind} AB = \operatorname{ind} A + \operatorname{ind} B}$

Док-во. Упражнение.

Теорема (инвариантность индекса)

1. (гомотопическая) $\operatorname{ind} F_t = Const$, если F_t — непр. сем-во.
2. (компактн. возмущения) $\operatorname{ind}(F + K) = \operatorname{ind} F$, K — компактен

Док-во: 1) $F_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F_0' \end{pmatrix}$, $F_t = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & F_0' + \alpha_{22} \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} F_t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ 0 & F_0' + \alpha_{22} \end{pmatrix}$$ приведение к диагональному виду, если α_{22} мал

$\Longrightarrow \operatorname{ind} F_t = \operatorname{ind} \underline{\underline{\alpha_{11}}} = \dim\ker F_0 - \dim\operatorname{coker} F_0 = \operatorname{ind} F_0$

$\underline{\underline{\alpha_{11}}}$ — конечномерный

2) следует из 1): $F + tK$. □

Обобщение: фредгольмовы комплексы и их индекс

$\mathbf{K}$ $\qquad 0 \to H_0 \xrightarrow{A_0} H_1 \xrightarrow{A_1} H_2 \longrightarrow \ldots \to 0 \qquad (*)$

Опр. Комплекс $\mathbf{K}$ *фредгольмов* $\Leftrightarrow$ когомологии $H^i(\mathbf{K}) = \ker A_i / \operatorname{Im} A_{i-1}$ — конечномерны

Индекс комплекса

$$\operatorname{ind} \mathbf{K} = \sum (-1)^i H^i(K)$$

- есть аналог теоремы Аткинсона;
- комплекс можно свернуть:

$$\operatorname{ind} \mathbf{K} = \operatorname{ind} \left(A + A^* : H^{ev} \longrightarrow H^{odd} \right)$$

$H^{ev} = H^0 \oplus H^2 \oplus \ldots$
$H^{odd} = H^1 \oplus H^3 \oplus \ldots$

- мультипликативное свойство

$$\operatorname{ind} \mathbf{KL} = \operatorname{ind} \mathbf{K} \cdot \operatorname{ind} \mathbf{L}$$

$\mathbf{K} \cdot \mathbf{L}$ — произведение комплексов

Следствие $\operatorname{ind} A\#B = \operatorname{ind} A \cdot \operatorname{ind} B$

$A : G_1 \longrightarrow H_1$, $B : G_2 \longrightarrow H_2$

$$A\#B = \begin{pmatrix} A \otimes 1 & 1 \otimes B^* \\ 1 \otimes B & -A^* \otimes 1 \end{pmatrix} : \begin{matrix} G_1 \otimes G_2 \\ \oplus \\ H_1 \otimes H_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H_1 \otimes G_2 \\ \oplus \\ G_1 \otimes H_2 \end{matrix}$$

Упражнение непосредственно проверьте это, используя то, что $\ker C = \ker C^*C$