Лекция 5.

Фредгольмовы операторы и индекс

Вопрос: когда дифференциальный оператор фредгольмов?

Задачи, которые для этого надо исследовать:

- указать пространства, в которых оператор рассматривается как ограниченный;
- построить почти обратный оператор.

Пространства Соболева

Опр. $H^s(\mathbb{R}^n)$ — *пространство Соболева порядка* s — пополнение $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по норме

$$\|u\|_s^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |(1+\triangle)^{s/2}u|^2 dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

$\triangle$ — Лапласиан $\widehat{u}$ — преобразование Фурье

Замечание Для целых $s \geq 0$ условие $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ эквивалентно: производные до порядка s суммируемы с квадратом

Образуют *шкалу*: $H^s(\mathbb{R}^n) \subset H^{s'}(\mathbb{R}^n)$ при $s > s'$

Утверждение: $\bigcap_s H^s(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Док-во: $-i\frac{d}{dx} \overset{\text{преобр.Фурье}}{\longleftrightarrow} \xi$

Утвержд: $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \bigcup_s H^s(\mathbb{R}^n)$

$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ — распределения с компактн. носителем

Теорема

A — дифференциальный оператор порядка m $\Longrightarrow$ $A : H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ — непрерывен $\forall s$

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Задача: построить такое расширение алгебры дифференциальных операторов на гладком замкнутом многообразии, чтобы в нем

- содержались почти обратные операторы (регуляризаторы) эллиптических дифференциальных операторов;
- был достаточный запас эллиптических операторов для проведения гомотопий необходимых в эллиптической теории.

Гомотопии в K-теории включают произвольные непрерывные символы на S^*M; достаточно, конечно, рассматривать гладкие символы на сферах, но следов полиномов (заданной степени, равной порядку рассматриваемых операторов) ни в коем случае не хватает.

Локальная конструкция

Будем строить ПДО в $\mathbb{R}^n$.

$x \in \mathbb{R}^n$ — координаты, $\xi \in \mathbb{R}^n$ — двойственные импульсы

Символы

$$H \in S^m(\mathbb{R}^{2n}) \ (H(x,\xi) — \textit{символ порядка } m)$$

$$\Updownarrow$$

• производные $H^{(\alpha\beta)}_{x\xi}(x,\xi)$ растут при $|\xi| \to \infty$ не быстрее $|\xi|^{m-\beta}$ (равномерно по x).

• $H(x,\xi) \simeq H_m(x,\xi) + H_{m-1}(x,\xi) + H_{m-2}(x,\xi) + \ldots,$ (*)

($H_k(x,\xi)$ однородна порядка k по ξ, остаток убывает при $|\xi| \to \infty$)

Операторы

ПДО порядка m: $H \in S^m \Longrightarrow \boxed{\widehat{H}u = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} H(x,\xi)\widetilde{u}(\xi)\, d\xi}$

Главный символ $\sigma(H) \stackrel{\text{def}}{=} H_m$ (главный член в (*))

Свойства:

- H — полином $\Longrightarrow \widehat{H} = H(x, -i\partial/\partial x)$ — обычный дифф. оператор.
- $H \in S^m \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\widehat{H} : H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-m}(\mathbb{R}^n) \\ \text{непрерывен при любом } s\end{array}}$ пр-ва Соболева
- $H \in S^m$, $G \in S^k \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\widehat{H}\widehat{G} = \widehat{HG} + \widehat{R}, \\ R \in S^{m+k-1}\end{array}}$ *формула композиции*
- $H \in S^m$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм с огран. производными

$\boxed{g^*\widehat{H}(g^*)^{-1} = \widehat{g^*H} + \widehat{R},}$ где $g^*H = H\left(g(x), \left(^t\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)^{-1}\xi\right)$, $R \in S^{m-1}$(**)

формула замены переменных

Глобализация

Задача: M — гладкое компактное многообразие. Как определить ПДО?

Наблюдение:

Формула (**) $\Longrightarrow$ главный символ преобразуется при заменах переменных, как функция на пространстве кокасательного расслоения

Решение:

Дано: гладкая функция σ на T^*M (вне нулевого сечения) однородная степени m по слоям $\longrightarrow$ **строим** ПДО с главным символом σ по след. процедуре

1. Покрыть M картами U_j и выбрать подчиненное разбиение единицы $1 = \sum \chi_j^2$.
2. Выписать выражение $F_j = F_j(x, \xi)$ символа σ в локальных координатах в $T^*U_j \subset T^*M$ и сгладить его при $\xi = 0$. Тогда $\chi_j F_j$ будет элементом пространства S^m (при задаваемом координатами вложении $T^*U \subset \mathbb{R}^{2N}$).
3. Положить $D = \sum\limits_j \widehat{\chi_j F_j} \chi_j$.

Свойства:

- Оператор $D : H^s(M) \longrightarrow H^{s-m}(M)$ непрерывен $\forall s$.
- Оператор D не зависит от произвола в конструкции с точностью до операторов, непрерывных из $H^s(M)$ в $H^{s-m+1}(M)$ (такие операторы компактны из $H^s(M)$ в $H^{s-m}(M)$)

Таким образом,

главный символ $\sigma = \sigma(D)$ оператора D определяет его однозначно по модулю компактных операторов.

Обозначение: $L^m(M)$ — пространство ПДО порядка m на M.

Формула композиции:

Произведение ПДО снова есть ПДО, и $\sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B)$.

Итак, $L^m \cdot L^k \subset L^{m+k}$, а главные символы просто перемножаются при вычислении произведения операторов.

Инвариантное определение ПДО по Хермандеру

Псевдодифференциальные операторы на многообразии M можно также сразу определить инвариантным образом как такие непрерывные линейные операторы

$$P : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M),$$

что если f, g гладкие функции, f финитна, g вещественнозначна и $dg \neq 0$ на $\operatorname{supp} f$, то при $\lambda \to \infty$ справедливо локально равномерное по g асимптотическое разложение

$$\boxed{e^{-i\lambda g} P\left(f e^{i\lambda g}\right) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} P_j(f,g)\lambda^{m-j},}$$

где коэффициенты $P_j(f,g)$ — гладкие функции на M. Тогда главный символ восстанавливается по формуле

$$P_0(f,g) = \sigma(P)(dg)f.$$

Эллиптическая теория

Применим ПДО для построения регуляризатора и доказательства теоремы конечности для эллиптических операторов.

Опр. Оператор $D \in L^m$ — *эллиптический* $\iff$ $\sigma(D)$ не обращается в нуль на $T^*M \setminus \mathbf{0}$.

Для дифф. операторов это определение совпадает с обычным

Теорема конечности

Если ПДО $D \in L^m$ эллиптический, то он фредгольмов в любой паре пространств Соболева $H^s(M), H^{s-m}(M)$

Док-во.

1. Построение регуляризатора.

$D \in L^m$ эллиптический $\Longrightarrow$ $\sigma(D)^{-1}$ гладкая функция, однородная степени $-m$. Построим ПДО R с символом $\sigma(R) = \sigma(D)^{-1}$.

По формуле композиции $\Longrightarrow$ $\boxed{\sigma(DR) = \sigma(RD) = 1}$

Поэтому R — регуляризатор: DR и RD отличаются от единичного оператора на компактные операторы.

2. D фредгольмов по теореме Аткинсона. □

Упражнение. Докажите *теорему о регулярности решений*:

Если ПДО $D \in L^m$ эллиптический, то его ядро и коядро состоят из гладких функций

Указание. Воспользуйтесь регуляризатором.

Вывод: индекс $\operatorname{ind} D$ не зависит от порядка s пространств Соболева, и совпадает с его индексом как оператора в $C^\infty(M)$.

Обобщения

Операторы в расслоениях

$E, F \in \mathrm{Vect}(M)$ $\qquad$ $\pi : T^*M \setminus \{0\} \to M$

$\boxed{A : C^\infty(M,E) \longrightarrow C^\infty(M,F) - \text{пдо порядка } m}$ $\qquad$ $\boxed{\sigma(A) : \pi^*E \longrightarrow \pi^*F \text{ — главный символ}}$

Эллиптичность: $\exists \sigma(A)^{-1}$

Комплексы операторов

$$0 \to C^\infty(M,E_0) \xrightarrow{D_0} C^\infty(M,E_1) \xrightarrow{D_1} C^\infty(M,E_2) \to \dots$$

Опр. $\boxed{\text{комплекс эллиптичен}}$

$$\Updownarrow$$

$\boxed{\textit{символьный комплекс } 0 \to \pi^*E_0 \overset{\sigma(D_0)}{\to} \pi^*E_1 \overset{\sigma(D_1)}{\to} \dots \text{ точен на } T^*M \setminus \{0\}}$

Теорема $\boxed{\text{эллиптичность}} \Longrightarrow \boxed{\text{фредгольмовость}}$

$\boxed{\text{Гладкость решений: когомологии можно считать в } C^\infty}$

Пример 1 (комплекс де Рама)

$(\Lambda^\bullet, d)$ $\quad \boxed{0 \to C^\infty(M) \xrightarrow{d} \Lambda^1(M) \xrightarrow{d} \Lambda^2(M) \to \dots \Lambda^n(M) \to 0}$

$$0 \to \mathbb{C} \xrightarrow{\xi\wedge} \Lambda^1(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\xi\wedge} \Lambda^2(\mathbb{C}^n) \to \dots \qquad \xi \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathrm{ind}(\Lambda^\bullet, d) = \sum (-1)^i \dim H^i(M,\mathbb{C}) = \chi(M) =$$
$$= \mathrm{ind}\left(d + d^* : \Lambda^{ev}(M) \longrightarrow \Lambda^{odd}(M)\right) \text{ — } \textit{оператор Эйлера}$$

Пример 2 (комплекс Дольбо и оператор Тодда)

M — комплексное многообразие $z_1, z_2, \ldots, z_n$

Комплекс Дольбо

$(\Lambda^{0,\bullet}, \overline{\partial})$ $\boxed{0 \to C^\infty(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,1}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,2}(M) \to \ldots \Lambda^{0,n}(M) \to 0}$

- $\Lambda^{0,k}(M) \subset \Lambda^k(M) \otimes \mathbb{C}$ — формы, содержащие только $d\overline{z}_j$
- $\overline{\partial}\left(f d\overline{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{j_k}\right) = \sum \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{j_k}$

$\boxed{\operatorname{ind}(\Lambda^{0,\bullet}, \overline{\partial}) = \sum_q (-1)^q h^{0,q}(M)}$ *арифметический род*

эйлерова характеристика с коэффициентами
в пучке ростков голоморфных функций

Пример 3 (оператор сигнатуры) M^{2l} — ориентированное риманово

$\boxed{\textit{скалярное произведение}: \langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \int_M \omega_1 \wedge * \omega_2}$

$\boxed{\begin{array}{c} \textit{звездочка Ходжа}, * : \Lambda^k(M) \longrightarrow \Lambda^{n-k}(M) \\ *(e_1 \wedge \ldots \wedge e_k) = e_{k+1} \wedge \ldots \wedge e_n \\ \text{для ортонорм. ориентир. базиса } (n = 2l) \end{array}}$

$\boxed{d^* = - * d * : \Lambda^{k+1}(M) \longrightarrow \Lambda^k(M)}$ сопряж. оператор

$\Lambda(M) = \Lambda^+(M) \oplus \Lambda^-(M)$ — собственные подпр-ва
инволюции $\alpha|_{\Lambda^k(M)} = i^{k(k+1)+l} *$

$\Downarrow$ $d + d^*$ антикоммутирует с α

$\boxed{d + d^* : \Lambda^+(M) \longrightarrow \Lambda^-(M)}$ **оператор сигнатуры**

$\operatorname{ind}(d + d^* \colon \Lambda^+(M) \longrightarrow \Lambda^-(M)) = \operatorname{sign} M$

сигнатура
формы пересечения
$H^l(M) \times H^l(M) \longrightarrow \mathbb{R}$
$\omega_1, \omega_2 \mapsto \int_M \omega_1 \wedge \omega_2$

Теорема 1 Индекс эллиптического оператора:

1. определяется главным символом;
2. является гомотопическим инвариантом главного символа.

Док-во.

1. Если $\sigma(A) = \sigma(B), \operatorname{ord} A = m \Rightarrow B - A$ — порядка $\leq m-1 \Rightarrow$
$$\boxed{\operatorname{ind} A = \operatorname{ind}(A + \underbrace{(B-A)}_{\text{компактн.}}) = \operatorname{ind} B}$$

2.
$$\boxed{\sigma_t \text{ — непрерывная гомотопия эллиптических символов}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\widetilde{\sigma}_t \text{ — гладкая гомотопия}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\operatorname{ind} \widehat{\widetilde{\sigma}}_t = Const}$$

— индекс непрерывного фредгольмова семейства постоянен. □

Проблема индекса :	**вычислить этот инвариант в топологических терминах.**

Гомотопическая классификация эллиптических операторов

Замечание Можно рассматривать только операторы нулевого порядка. Редукция $A(1+\triangle)^{-m/2}$

Опр. $A_1 \sim A_2$ — *стабильно гомотопные эллиптические операторы*:

$\exists$ гомотопия $A_1 \oplus 1_{E'} \rightsquigarrow A_2 \oplus 1_{E''}$,

1_E — единичный оператор в расслоении

$$\operatorname{Ell}(M) = \left\{ \begin{array}{c} \text{эллиптические операторы} \\ \text{нулевого порядка} \end{array} \right\} \Big/ \sim \text{ стабильные гомотопии}$$

$\operatorname{Ell}(M)$ — группа (относительно $\oplus$) $-[A] = [A^{-1}] = [A^*]$

Теорема (классификация)

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ell}(M) & \xrightarrow{\chi} & K_c(T^*M) \text{ — изоморфизм} \\ A : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,F) & \mapsto & [\pi^*E, \pi^*F, \sigma(A)], \quad \pi : T^*M \to M \end{array}$$

$\sigma(A)$ — изоморфизм вне компакта

Док-во. 1) χ корректно определено, т.к.

гомотопии операторов $\Longleftrightarrow$ гомотопии символов

2) эпиморфность:

тройки $[\widetilde{E}', \widetilde{F}', \widetilde{\sigma}]$, $\widetilde{E}', \widetilde{F}' \in \mathrm{Vect}(T^*M)$ сводятся к $[\pi^*E, \pi^*F, \sigma]$ (в силу ретракции $T^*M \to M$)

3) мономорфность: строится обратное отображение χ^{-1}. Упражнение.

□

гомотопическая инвариантность индекса

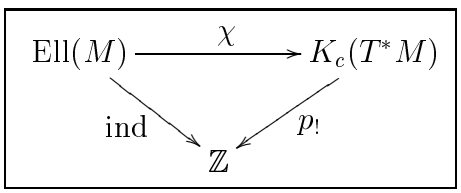
$\Downarrow$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{ind} : \mathrm{Ell}(M) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ A & \mapsto & \mathrm{ind}\, A \end{array}$$

гомоморфизм групп

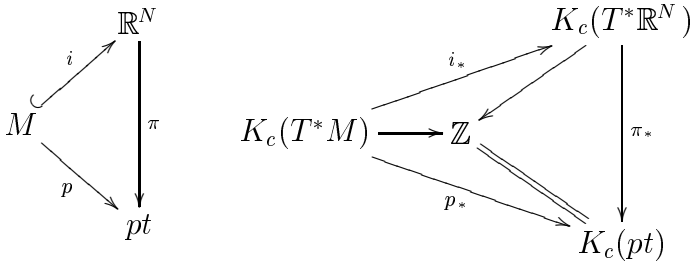
Теорема Атьи–Зингера (об индексе)

коммутативна диаграмма:



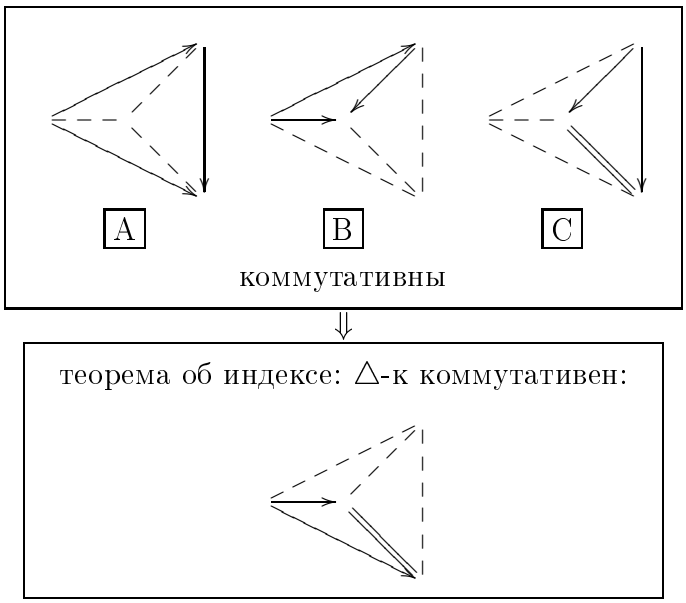
Отображение $p_! : K_c(T^*M) \longrightarrow K_c(T^*pt) = K_c(pt) = \mathbb{Z}$
индуцировано проекцией $M \longrightarrow pt$.

Схема доказательства



Здесь: — отождествляем $\mathrm{Ell}(M) \simeq K_c(T^*M)$

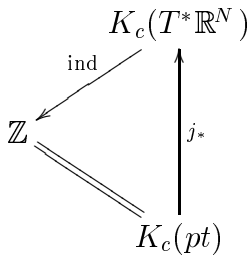
— на некомпактном пространстве операторы нулевого порядка, которые изоморфизмы расслоений на ∞-ти.



A Функториальность: $p = \pi i \Rightarrow p_* = \pi_* i_*$

B Индекс сохраняется при вложениях

C



$j : pt \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, т.е. частный случай B