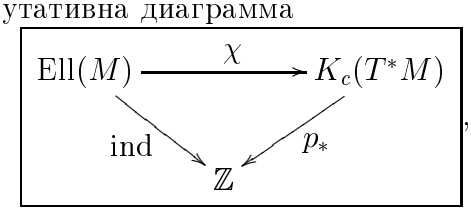
Лекция 6. Теорема Атьи–Зингера об индексе

Коммутативна диаграмма

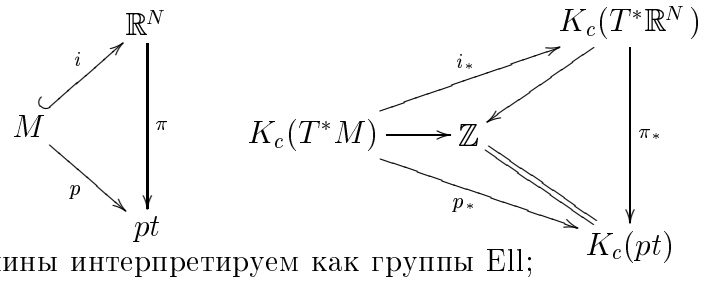


$\chi[A] \stackrel{def}{=} [\sigma(A)]$
χ— изоморфизм (1)

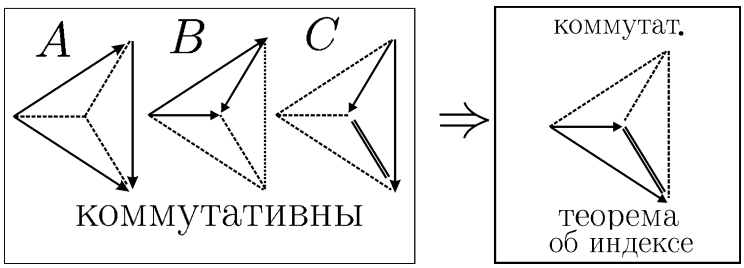
$p_* : K_c(T^*M) \to K_c(T^*pt) = K_c(pt) = \mathbb{Z}$
— прямой образ индуцированный проекцией $M \to pt$.

Идея док-ва: Вложим диаграмму (1) в какую-нибудь коммутативную диаграмму

Дополнительное построение:



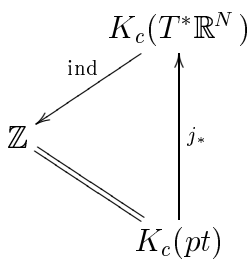
- вершины интерпретируем как группы Ell;
- отображения в $\mathbb{Z}$ — аналитический индекс.



A) следует из функториальности $p = \pi i \Rightarrow p_* = \pi_* i_*$;

B) эквивалентно **Индекс сохраняется при вложениях**;

C) частный случай **B)** для $j : pt \to \mathbb{R}^N$



Сохранение индекса при вложениях

1. Простейшее вложение: $j : pt \to \mathbb{R}^n$

Достаточно построить эллиптический оператор в $\mathbb{R}^n$ со свойствами:
- $\mathrm{ind} D = 1$;
- $[\sigma(D)] = j_*[1]$.

Конструкция оператора

1. Оператор Эйлера в диске $\overline{\mathbb{D}}^n$

$$\mathrm{ind}\left(0 \to \Lambda^0(\overline{\mathbb{D}}^n) \xrightarrow{d} \Lambda^1(\overline{\mathbb{D}}^n) \ldots \to 0\right) = \chi(\overline{\mathbb{D}}^n) = 1$$

$\Downarrow$ свертываем

краевая задача для оператора Эйлера

$$\mathrm{ind}\left(d + d^* : \Lambda_0^{ev}(\overline{\mathbb{D}}^n) \longrightarrow \Lambda^{odd}(\overline{\mathbb{D}}^n)\right) = 1,$$
$$\Lambda_0(\overline{\mathbb{D}}^n) = \left\{\omega \;\middle|\; (*\omega)|_{\partial\overline{\mathbb{D}}^n} = 0\right\}$$

(граничное условие — формула Стокса)

2. Лемма о редукции порядка (из теории краевых задач)

$$\begin{cases} Du = f, \\ P(u|_{\partial M}) = 0 \end{cases}$$

- $D|_{U_{\partial M}} = \Gamma(t)\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + A(t)\right)$
- P — проектор на крае ∂M
- Γ — изоморфизм расслоений
- $A(t)$ — семейство эллиптических самосопр. операторов на ∂M

если (D, P) эллипт. $\Downarrow$

$\mathrm{ind}(D, P) = \mathrm{ind}\, D_0$
D_0 — оператор нулевого порядка

$$\sigma(D_0) = \begin{cases} \sigma(D) & \text{вдали от } \partial M \\ \Gamma([i\tau + a(\xi)]\varepsilon(t) + [2P-1](1-\varepsilon(t))) & \\ & \text{вблизи } \partial M. \end{cases}$$

3. В нашем случае: $[\sigma(D_0)] = j_*[1]$, так как $\sigma(D_0)$ гомотопен символу свернутого комплекса де Рама $\mathbb{C}^n$.

Установили: индекс сохраняется при вложении $pt \hookrightarrow \mathbb{R}^n$

2. Вложение $X \xrightarrow{f} Y$ с тривиальным нормальным расслоением

$$X \subset NX \subset \overline{NX} \subset Y, \quad \boxed{\overline{NX} \simeq X \times \overline{\mathbb{D}}^n}$$

Напомним (прямой образ для вложения)

$$\boxed{[\sigma(A)] \in K_c(T^*X)} \qquad \mapsto \quad \boxed{f_*[\sigma(A)] = [\sigma(A)\#D_{\mathbb{C}^n}] \in K_c(T^*Y)}$$

$A : C^\infty(X, E) \to C^\infty(X, F)$ $\qquad$ $D_{\mathbb{C}^n}$ — алг.комплекс де Рама $\mathbb{C}^n$

Краевая задача на трубчатой окрестности:

$$A\#\mathcal{D}_{dR} = \begin{pmatrix} A \otimes 1 & 1 \otimes (d + d^*) \\ 1 \otimes (d + d^*) & -A^* \otimes 1 \end{pmatrix} :$$

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(X, E) \otimes \Lambda_0^{ev}(\overline{\mathbb{D}}^n) & & C^\infty(X, F) \otimes \Lambda^{ev}(\overline{\mathbb{D}}^n) \\ \oplus & \to & \oplus \\ C^\infty(X, F) \otimes \Lambda_0^{odd}(\overline{\mathbb{D}}^n) & & C^\infty(X, E) \otimes \Lambda^{odd}(\overline{\mathbb{D}}^n) \end{array}$$

Мультипликативное свойство индекса:

$$\boxed{\operatorname{ind}(A\#\mathcal{D}_{dR}) = \operatorname{ind} A \operatorname{ind} \mathcal{D}_{dR} = \operatorname{ind} A \cdot 1}$$

Как и ранее

- $(A\#\mathcal{D}_{dR}) \xrightarrow{\text{редукция к нулевому порядку}} D_0$, $\operatorname{ind}(A\#\mathcal{D}_{dR}) = \operatorname{ind} D_0$;
- $[\sigma(D_0)] = f_*[\sigma(A)]$.

$\Downarrow$

Индекс сохраняется при прямом образе:

$$\boxed{\operatorname{ind} f_*[\sigma(A)] = \operatorname{ind} A}$$

3. Вложение с нетривиальным нормальным расслоением

семейство свернутых комплексов де Рама в нормальном направлении $(\mathcal{D}_{dR})_x : \Lambda_0^{ev}(\overline{NX}_x) \longrightarrow \Lambda^{odd}(\overline{NX}_x)$

$$\mathcal{D} = A\#\mathcal{D}_{dR} = \begin{pmatrix} A\otimes 1 & 1\otimes \mathcal{D}_{dR}^* \\ 1\otimes \mathcal{D}_{dR} & -A^*\otimes 1 \end{pmatrix}$$

Оператор $A \otimes 1$ строится на $\overline{NX}$ над тривиализованными окрестностями

$\Downarrow$

диагональные члены в $A\#\mathcal{D}_{dR}$ коммутируют с внедиагональными

Лемма 1. $\operatorname{ind}\mathcal{D} = \operatorname{ind} A$

Док-во:

1.
$$\ker\mathcal{D} = \ker\mathcal{D}^*\mathcal{D} = \ker\begin{pmatrix} A^*A\otimes 1 + 1\otimes \mathcal{D}_{dR}^*\mathcal{D}_{dR} & 0 \\ 0 & AA^*\otimes 1 + 1\otimes \mathcal{D}_{dR}\mathcal{D}_{dR}^* \end{pmatrix} =$$
$$= \ker(A^*A\otimes 1)\cap\ker(1\otimes\mathcal{D}_{dr}) = \ker A$$

Здесь используем: коядро комплекса де Рама тривиально, а ядро состоит из констант(по слою).

2. с коядром — аналогичное вычисление с оператором $\mathcal{D}^*$.

□

Как и ранее

- редукция краевой задачи к оператору нулевого порядка;
- при редукции получается оператор с символом равным $f_*[\sigma(A)]$.

Поэтому индекс сохраняется при произвольном вложении.

Теорема Атьи–Зингера доказана.

Первое доказательство теоремы Атьи–Зингера

Идея: редукция к простому оператору

1. Редукция к оператору сигнатуры.

Теорема

M — *ориентированное четномерное многообразие*	$\Rightarrow$	$K_c(T^*M) \otimes \mathbb{Q}$ — *свободный* $K(M) \otimes \mathbb{Q}$-*модуль с одной образующей, определяемой символом оператора сигнатуры* $\mathcal{H}$

Док-во (схема):

Искомая изоморфность отображения

$$\begin{array}{ccc} K^*(M) & \longrightarrow & K_c^*(T^*M) \\ x & \mapsto & x[\sigma(\mathcal{H})] \end{array}$$

доказывается в духе Майера–Вьеториса (см. пред.Лекции): надо только проверить изоморфность над точкой:

$$\begin{array}{ccc} K^0(pt) & \xrightarrow{\cdot[\sigma(\mathcal{H})]} & K_c^0(\mathbb{R}^{2n}) \\ \| & & \| \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2^n} & \mathbb{Z} \end{array}$$

(получается прямым вычислением, или см. след. лекции). □

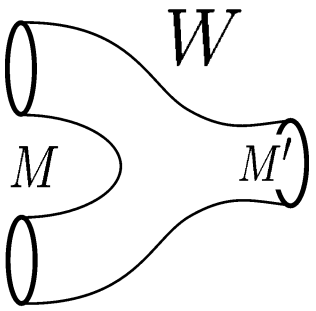
Другими словами:

Произвольный эллиптический оператор сводится к *оператору сигнатуры с коэффициентами в расслоении.*

2. Индекс оператора сигнатуры (с коэффициентами).

Свойства сигнатуры:

- $\operatorname{sign} M = \operatorname{sign} M'$, если M *кобордантно* M';
- гомоморфизм колец sign : $\Omega_* \longrightarrow \mathbb{Z}$ (здесь Ω_* — *кольцо кобордизмов*);
- поэтому сигнатура однозначно определяется заданием на образующих кольца кобордизмов.



$$\partial W = M \cup -M'$$

$$\Omega_* = \Big\{\text{многооб.}\Big\}\Big/ \sim$$

бордизмы

Вернемся к индексу:

$\operatorname{ind} \mathcal{H} \otimes 1_E = f(M, E)$ — инвариант *кобордизма пары* (M, E)

$$(M, E) \sim 0 \iff \begin{matrix} M = \partial W \\ E = \widetilde{E}|_{\partial W} \end{matrix}$$

Теория Коннера–Флойда: кольцо кобордизмов пар $\Omega_*(\mathbf{BU})$ порождено элементами $(\mathbb{CP}^n, 1), (\mathbb{S}^{2n}, V_n)$ (здесь V_n — образующая $K(\mathbb{S}^{2n})$).

И остается проверить формулу индекса только на образующих.

Топология		Эллиптическая теория
сигнатура	$\leftrightarrow$	индекс эллипт. оператора

Например, можно исследовать для индекса **общих** операторов следующие свойства сигнатуры:

- инвариантность относительно кобордизма;
- аддитивность Новикова; $\operatorname{sign}(M \cup N) = \operatorname{sign} M + \operatorname{sign} N$
- мультипликативность: $\operatorname{sign}(B \times F) = \operatorname{sign} B \cdot \operatorname{sign} F$
- немультипликативность для расслоения $E \to B$ (слой F):

$$\operatorname{sign} E \neq \operatorname{sign} B \cdot \operatorname{sign} F, \text{ если } \pi_1(B) \neq 0.$$

...

Индекс имеет много обобщений (и приложений):

1. более общие многообразия;
2. более общие операторы;
3. более общие индексы (индекс не обязательно — число!).

Индекс семейств

Семейство $D = \{D_x : H_1 \to H_2\}_{x \in X}$ фредгольмовых операторов параметризованных компактом X

$$\Downarrow \text{ если } \dim\ker D_x = Const$$

$\ker D, \mathrm{coker} D \in \mathrm{Vect}(X)$ — векторные расслоения

Определение $\mathrm{ind}\, D = [\ker D] - [\mathrm{coker} D] \in K(X)$ — *индекс фредгольмова семейства* D (*)

В общем случае имеет место теорема

Теорема 2. *Существует изоморфизм продолжающий* (*)

$$\mathrm{ind} : [X, \mathrm{Fred}(H)] \simeq K(X).$$

Док-во (схема):

1) конструкция отображения

существует $L \subset H_1$ — конечной коразмерности: $\ker D \cap L = \{0\}$ $\Rightarrow$ семейство с постоянным ядром $\widetilde{D} = (D|_L, 0) : L \oplus L^\perp \longrightarrow H_2$

$\mathrm{ind}\, D \stackrel{def}{=} \mathrm{ind}\, \widetilde{D} \in K(X)$ — не зависит от выбора подпространства L

2) точная последовательность

$$[X, \mathbf{U}(H)] \to [X, \mathrm{Fred}(H)] \stackrel{\mathrm{ind}}{\to} K(X) \to 0$$

3) Теорема Kuiper'a: унитарная группа $\mathbf{U}(H)$ стягиваема $\Rightarrow K(X) = [X, \mathrm{Fred}(H)]$. □

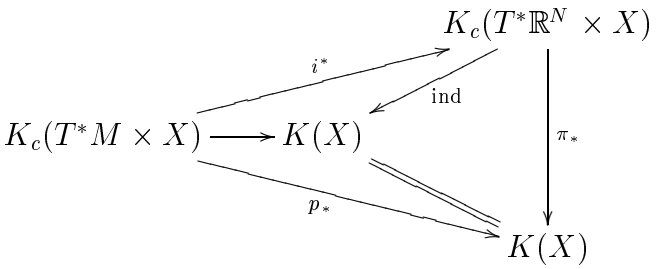
$D = \{D_x\}_{x\in X}$ — непрерывное семейство эллиптических операторов на M параметризованное компактом X	$\Rightarrow$	$[\sigma(D)] \in K_c(T^*M \times X)$ — *разностный элемент эллиптического семейства*

Теорема Атьи–Зингера для семейств

$$\boxed{\operatorname{ind} D = p_*[\sigma(D)] \in K(X)}$$

прямой образ $p_* : K_c(T^*M \times X) \longrightarrow K(X)$ индуцирован проекцией $p : M \times X \to X$.

Доказательство проводится как и ранее. На этот раз устанавливается коммутативность диаграммы:



Периодичность Ботта и фредгольмовы семейства

Отображение периодичности:

$$\begin{array}{ccc} \beta : K(X) & \longrightarrow & K_c(X \times \mathbb{R}^2) \\ E & \mapsto & \pi^*E \xrightarrow{z\cdot Id} \pi^*E \end{array}$$

Обратное отображение (через индекс семейств):

$$\begin{array}{rcl} \beta^{-1}\left(\pi^*F \xrightarrow{\sigma} \pi^*F\right) & = & \operatorname{ind}\left(P\sigma : \mathrm{Im}P \otimes E \longrightarrow \mathrm{Im}P \otimes E\right) \\ \sigma = \sigma(x,z) & & P : L^2(\mathbb{S}^1) \to L^2(\mathbb{S}^1) \text{ — проектор Харди} \end{array}$$

Доказательство взаимной обратности отображений β, β^{-1} см. Атья Lecture Notes 103

Упражнения

1. Прямой образ есть и в нечетных K-группах. В простейшем нетривиальном случае имеем

$$K_c^1(T^*M \times \mathbb{S}^1) \longrightarrow K^1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}.$$

   Найдите аналитическую интерпретацию соответствующего числового инварианта. (Подсказка: это индекс некоторого оператора на некотором многообразии!)

2. Другой взгляд на предыдущее упражнение. Покажите, что символ эллиптического самосопряженного оператора определяет элемент группы $K_c^1(T^*M)$. **Указание**: посмотрите на отображения точной последовательности пары

$$(\text{единичные сферы в } T^*M) \subset (\text{единичные шары в } T^*M)$$

3. Попробуйте придумать числовой гомотопический инвариант для периодических семейств $\{A_\varphi\}_{\varphi \in \mathbb{S}^1}$ эллиптических самосопряженных операторов. **Указание**. Спектр периодического семейства также изменяется периодическим образом.

4. Попробуйте сформулировать формулу, связывающую индексный инвариант (из первого упражнения) с инвариантом периодических семейств самосопряженных операторов (третье упражнение).