Лекция 7. G-теория индекса

$G : M$ — компактная группа Ли действует диффеоморфизмами

$$\boxed{\begin{array}{l}D \text{ — } G\textit{-инвариантный} \text{ эллиптический}\\ \text{оператор на } M\text{: } \forall g \in G \quad Dg^* = g^*D\end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$\ker D, \operatorname{coker} D$ — конечномерные представления группы G

Определение $\boxed{\begin{array}{l}\operatorname{ind}_G D = [\ker D] - [\operatorname{coker} D] \in R(G) \text{ —}\\ G\textit{-индекс} \text{ оператора } D\end{array}}$

Здесь $R(G)$ — группа Гротендика полугруппы представлений — *кольцо виртуальных представлений* группы G.

Теорема 1. $\boxed{\begin{array}{l}\operatorname{ind}_G \text{ — } \textit{гомотопический инвариант}\\ G\textit{-инвариантного оператора}\\ (\textit{определяется главным символом})\end{array}}$

Интерпретации G-индекса (из теории представлений):

1. $$R(G) = \bigoplus_{\substack{\text{неэкв. непривод.}\\ \text{представления } G}} \mathbb{Z}$$

2. $$\begin{array}{ccccl} R(G) & \subset & C(G) & \text{—} & \text{непр. функции на группе}\\ \rho \text{ — представление} & \mapsto & \operatorname{Tr} \circ \rho & \text{—} & \textit{характер}. \end{array}$$

Пример: Для группы $\mathbb{Z}_2$ — два инварианта:

$$\begin{array}{ccc} R(\mathbb{Z}_2) & = & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\\ \text{представление } \rho & \mapsto & \operatorname{Tr} \rho(e) = \dim \rho, \operatorname{Tr} \rho(g) = \dim \rho_+ - \dim \rho_-. \end{array}$$

Пример (G-сигнатура)

$$G : M^{2n} \text{ — действие сохраняющее ориентацию}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\operatorname{sign}_G M \text{ — функция на группе } G;\\ \operatorname{sign}_g M = \operatorname{Tr} g|_{H^{+,n}(M)} - \operatorname{Tr} g|_{H^{-,n}(M)}\\ H^{\pm,n}(M) = \Lambda^{\pm}(M) \cap H^n(M)\end{array}}$$

Эквивариантные расслоения

G действует на X.

Опр. $\boxed{E \in \mathrm{Vect}_G(X) \text{ — } G\text{-эквивариантное расслоение}} \Leftrightarrow \boxed{G \text{ действует на } E \text{ послойно линейно: } \forall g \in G \;\; g(E_x) = E_{g(x)}}$

Контравариантный функтор относительно

G-эквивариантных отображений: $F : X \to Y$, таких что $Fg = gF$.

Свойства:

1) $X = pt \Rightarrow E$ — представление G:

$$E = \bigoplus_{V_i} n_i V_i, \quad V_i \text{ — неприводимые представления.}$$

2) $\boxed{\text{тривиальное действие } (gx = x, \forall x, g)} \Rightarrow \boxed{\mathrm{Vect}_G(X) \simeq \bigoplus_{\text{неприв.предст. } G} \mathrm{Vect}(X)}$

Док-во: 1) G-расслоение $E \Rightarrow$ множество неподвижных точек E^G — векторное расслоение, так как $E^G = \operatorname{Im} P, Pv = \int_G g(v)dg$ — проектор.

2) E, F — G-расслоения $\Rightarrow$ $\boxed{\mathrm{Hom}_G(E, F) \equiv \mathrm{Hom}(E, F)^G \text{ — вект. расслоение}}$.

3) Применим это так:

V_i — неприв. представление $\Rightarrow E_i = \mathrm{Hom}_G(X \times V_i, E) \in \mathrm{Vect}(X)$

Тогда $\boxed{E \simeq \bigoplus_{V_i} V_i \otimes E_i}$ (изоморфизм доказывается пользуясь леммой Шура). $\square$

3) $\boxed{X \text{ — главное } G\text{-расслоение (свободное действие) } (gx = x \Rightarrow g = 1)} \Rightarrow \boxed{\mathrm{Vect}(X/G) \to \mathrm{Vect}_G(X) \text{ — изоморфизм}}$

Док-во: Обратное отображение

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Vect}(X/G) & \longleftarrow & \mathrm{Vect}_G(X) \\ E/G & & E \\ \downarrow & \leftarrow & \downarrow \\ X/G & & X. \end{array}$$

Надо только проверить локальную тривиальность. $\square$

Эквивариантные K-группы

X — компакт, G действует на X

Опр. $\boxed{K_G(X) = \big\{[E]-[F] \;\big|\; E, F \in \mathrm{Vect}_G(X)\big\}/\sim}$ — группа Гротендика полугруппы G-расслоений.

Важно! $K_G(X)$ является модулем над кольцом характеров $K_G(pt) = R(G)$.

Как и в обычной K-теории определяются варианты K-групп:

1. *относительные K_G-группы* пары с G-инвариантным $Y \subset X$

$$K_G(X,Y) = K_G(X/Y, Y/Y), \quad K_G(X,pt) = \ker(K_G(X) \to K_G(pt)).$$

2. *K_G-группы с компактными носителями* для локально-компактного пространства X:

$$K_{G,c}(X) = K_G(X^+, \{+\})$$

(X^+ — одноточечная компактификация X).

3. *Высшие K_G-группы*

$$K_G^{-n}(X) = K_G(X \times \mathbb{R}^n)$$

(действие на $\mathbb{R}^n$ тривиально).

Периодичность Ботта:

$$K_G^{-n}(X) = K_G^{-n-2}(X).$$

Точная последовательность G-пары (X,Y):

$$\begin{tikzcd}
& K_G(X,Y) \arrow[r] & K_G(X) \arrow[dr] & \\
K_G^1(Y) \arrow[ur] & & & K_G(Y) \arrow[dl] \\
& K_G^1(X) \arrow[ul] & K_G^1(X,Y) \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

Дополнительное расслоение:

Предл. Для любого $F \in \mathrm{Vect}_G(X)$ существует *дополнительное расслоение* $F^{\perp}$: $F \oplus F^{\perp} \simeq \underline{M}$,

($\underline{M}$ — тривиальное расслоение со слоем M — конечномерным G-модулем)

Док-во основано на **теореме Мостова**:

для сильно непрерывного представления компактной группы Ли в банаховом пространстве $\mathcal{B}$ множество периодических векторов всюду плотно ($v \in \mathcal{B}$ — *периодический*, если орбита Gv лежит в конечномерном подпространстве)

Теорема Мостова $\Rightarrow$ существуют N сечений F, которые можно считать периодическими векторами в $\Gamma(F)$ — пространстве сечений.

Пусть M — (конечномерный) G-модуль, порожденный этими сечениями. Естественное отображение $\underline{M} \to F$, $(x, s) \mapsto s(x)$ — сюрьективно. Ядро отображения является искомым дополнительным расслоением $F^{\perp}$. $\square$

Разностная конструкция

Группа $K_G(X)$ определяется тройками (E, F, σ):

- E, F — G-расслоения на X;
- $\sigma : E \to F$ — G-эквивариантный гомоморфизм, обратимый вне некоторого G-инвариантного компакта в X.

Напомним, элемент K-группы, отвечающий тройке, можно определить, прибавляя *тривиальную тройку* $(F^{\perp}, F^{\perp}, 1)$ по формуле

$$\chi(E, F, \sigma) = \left[E \oplus F^{\perp} \bigcup_{\sigma \oplus 1} \underline{M} \right] - [\underline{M}] \in K_G(X^+, +).$$

Поговорим подробнее про изоморфизм Тома.

Изоморфизм Тома

$E \in \mathrm{Vect}_G(X)$ — комплексное G-расслоение.

Алгебраический комплекс де Рама на E (проекция $\pi : E \to X$)

$$0 \to \pi^*\Lambda^0(E) \xrightarrow{d} \pi^*\Lambda^1(E) \xrightarrow{d} \pi^*\Lambda^2(E) \to \ldots \to 0$$

с дифференциалом $d(\omega(e)) = e \wedge \omega(e)$ точен вне нулевого сечения и G-эквивариантен

$$\Downarrow$$

он определяет *эквивариантный класс Тома* $t_E \in K_G(E)$

Теорема об изоморфизме Тома.

Для комплексного G-расслоения E имеет место изоморфизм $K_G(X)$-модулей:

$$\begin{array}{ccc} K_G(X) & \simeq & K_G(E) \\ u & \mapsto & ut_E. \end{array}$$

Док-во. Для доказательства вместо Майера–Вьеториса применим

Принцип расщепления: если изоморфизм верен для расслоений, являющихся прямой суммой одномерных, то изоморфизм есть и для произвольного расслоения.

В силу принципа расщепления (принцип докажем чуть позже) изоморфизм достаточно установить только для одномерных расслоений (в силу мультипликативности: $t_{E\oplus F} = t_E t_F$).

Для одномерных расслоений это есть несложное обобщение периодичности Ботта:

$$K_G(X) \simeq K_G(L), \qquad L \in \mathrm{Vect}_G(X), \ \dim L = 1,$$

— доказывается оно аналогично случаю без группы (элементарными гомотопиями или через фредгольмовы операторы). ☐

Док-во принципа расщепления:

1. Существует G-пространство и эквивар. отображение его в X:

- при этом отображении обратный образ E является суммой одномерных расслоений;
- отображение индуцирует мономорфизм в K_G-группах.

Расщепление можно построить, например, так:

- Сначала рассмотрим PE — *проективизацию расслоения* E

$$PE = \big(E \setminus 0\big)/\mathbb{C}^*, \qquad \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus 0.$$

  (слоем в точке является проективное пространство $\mathbb{CP}^{\dim E-1}$).

- Поднятие расслоения E на PE имеет каноническое одномерное подрасслоение.
- За конечное число шагов, отщепляя одномерные расслоения, получаем пространство $\widetilde{P}E$, над которым расслоение E — сумма одномерных.

Мономорфность отображения $K_G(X) \to K_G(\widetilde{P}E)$

Слои расслоения $\pi : PE \longrightarrow X$ — комплексные многообразия.

Отображение *прямого образа*

$$\pi_* : K_G(PE) \longrightarrow K_G(X).$$

$$\pi_*(F) = \mathrm{ind}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*) \otimes 1_{\pi^* F} \in K_G(X)$$

— индекс семейства G-эквивариантных операторов в слоях.

Регулярность проективного пространства:

$$H^{0,0}(\mathbb{CP}^k) = \mathbb{C}, H^{0,l}(\mathbb{CP}^k) = 0, l > 0$$

$\Rightarrow \boxed{\pi_*\pi^*1 = \mathrm{ind}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*) = 1} \Rightarrow \boxed{\pi_*\pi^* = id \text{ и мономорфность } \pi^*}$, так как π_* — гомоморфизм $K_G(X)$-модулей.

2. Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} K_G(X) \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[d, "t_E"'] & K_G(\widetilde{P}E) \arrow[d, "t_{\pi^* E}"] \\ K_G(E) \arrow[r, "p^*"] & K_G(\pi^* E) \end{tikzcd}$$

- вертикальные стрелки — гомоморфизмы Тома на X и $\widetilde{P}E$;
- горизонтальные — мономорфизмы индуцированные соответствующими проекциями.

По условию правая вертикальная стрелка — изоморфизм (расслоение — сумма линейных). Отсюда можно получить (это упражнение! При проверке используйте $\pi_* \pi^* = id$.) изоморфность для левой стрелки.

Принцип расщепления установлен. $\square$

Прямой образ в K_G-теории

$$\boxed{f : X \longrightarrow Y \text{ — гладкое } G\text{-эквивариантное отображение}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\textit{прямой образ } f_* : K_G(TX) \longrightarrow K_G(TY)}$$

Кострукция повторяет обычную (лекция 4) и основана на диаграмме:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "(f,i)"] \arrow[dr, "f"'] & Y \times V \arrow[d] \\ & Y \end{tikzcd}$$

через $i : X \xhookrightarrow{i} V$ обозначено G-эквивариантное вложение в (конечномерный) G-модуль (**теорема Мостова**).

Теорема об индексе в G-ситуации

D — G-инвариантный эллиптический оператор на M	$\Rightarrow$	$[\sigma(D)] \in K_G(T^*M)$ — *разностный элемент*

Теорема Атьи–Зингера о G-индексе

$$\boxed{\operatorname{ind} D = p_*[\sigma(D)] \in R(G)}$$

прямой образ $p_* : K_G(T^*M) \longrightarrow K_G(pt) = R(G)$ индуцирован проекцией $p : M \to pt$.

Доказательство такое же как и ранее.

При проверке сохранения G-индекса при вложениях важно:

> индекс оператора Эйлера постоянен относительно G (группа действует тривиально на ядре оператора, которое состоит из постоянных функций, коядро — тривиально).

Приложение

(K-группы вещественных проективных пространств) (Адамс)

$\mathbb{RP}^n = \mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$ с действием $v \to -v$, поэтому применим $K_{\mathbb{Z}_2}$-теорию. Последовательность $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}^n$ дает

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} K^1_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{R}^n) \leftarrow & K_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{S}^{n-1}) & \leftarrow & K_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{D}^n) & \leftarrow & K_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{R}^n) & \leftarrow \\ & \| & & \| & & \| & \\ & K(\mathbb{RP}^{n-1}) & \leftarrow & K_{\mathbb{Z}_2}(pt) & \xleftarrow{i^*} & K_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{R}^n) & \end{array}}$$

Если $n = 2l$ — четное $\Rightarrow$ изоморфизм Тома дает:
- $K^1_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{R}^{2l}) = K^1_{\mathbb{Z}_2}(pt) = 0$;
- $K_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{R}^{2l}) = i_* K_{\mathbb{Z}_2}(pt)$.

Таким образом:

$$\boxed{K(\mathbb{RP}^{2l-1}) = K_{\mathbb{Z}_2}(pt)/i^* i_* K_{\mathbb{Z}_2}(pt).}$$

Вычислим отображение $i^* i_*$.
$K_{\mathbb{Z}_2}(pt) = R(\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ — порождена $[\mathbb{C}_+]$ и $[\mathbb{C}_-]$ $(g|_{\mathbb{C}_\pm} = \pm id)$.
Тогда

$$i^* i_*(\mathbb{C}_+) = \Lambda^{ev}(\mathbb{C}^l_+) - \Lambda^{odd}(\mathbb{C}^l_-) = (\mathbb{C}_+ - \mathbb{C}_-)2^{l-1},$$

$$i^* i_*(\mathbb{C}_-) = \Lambda^{ev}(\mathbb{C}^l_-) - \Lambda^{odd}(\mathbb{C}^l_+) = (\mathbb{C}_- - \mathbb{C}_+)2^{l-1},$$

$$\Rightarrow \boxed{K(\mathbb{RP}^{2l-1}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{2^{l-1}}}.$$

Упражнения.

1. Какие расслоения на $\mathbb{RP}^k$ отвечают $\mathbb{C}_+$ и $\mathbb{C}_-$?

2. Покажите что $K(\mathbb{RP}^{2n}) = K(\mathbb{RP}^{2n+1})$. Указание: воспользуйтесь точной последовательностью в K-теории, отвечающей отображениям $\mathbb{S}^{k+1} \subset \overline{\gamma} \to \mathbb{RP}^{k+1}$ (здесь $\overline{\gamma}$ — единичные шары в расслоении Хопфа γ, граница расслоения шаров есть сфера, а факторпространство — проективное пространство).

Приложение. Теорема Милнора

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра над $\mathbb{R}$.

Опр. $\boxed{\mathcal{A} \text{ — \textit{алгебра с делением}}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\forall a \neq 0 \text{ уравнение } ax = b \text{ однозначно разрешимо в } \mathcal{A} \text{ (т.е. умножение на } a \text{ — обратимый оператор)}}$

Теорема. Алгебры с делением существуют только в размерностях $1, 2, 4, 8$.

Док-во.

$$\boxed{\mathcal{A} \text{ — алгебра с делением, } \dim \mathcal{A} = n}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\exists f : \mathcal{A} \setminus 0 \longrightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}), \ \text{нечетная:} f(-a) = -f(a).}$$

$\boxed{\text{Нечетная функция на сфере}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{сечение расслоения Хопфа } \gamma_{n-1} = \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \big/ (v, p) \sim (-v, -p)}$

Обратимая матричнозначная функция f на $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathcal{A} \Rightarrow$

$$\boxed{\text{тривиализация } n\gamma_{n-1} \simeq \mathbb{R}^n.}$$

При больших n такое невозможно: $\gamma_{2k,\mathbb{C}}, \gamma_{2k+1,\mathbb{C}}$ — дают образующие приведенной группы $\widetilde{K}(\mathbb{RP}^{2k}) \simeq \mathbb{Z}_{2^k}$

Поэтому n делится на высокую степень двойки (примерно $2^{n/2}$).

Прямая проверка оставляет только возможности $n = 1, 2, 4, 8$. $\square$

В следующий раз

Значение $\mathrm{ind}_g\, D \in \mathbb{C}$ определяется действием только элемента g.

Вопрос: можно ли вычислить это число в терминах символа оператора и инвариантов действия g?

Ответ: Да, можно. Искомая формула дается *теоремой Лефшеца о неподвижной точке* — $\mathrm{ind}_g\, D$ определяется данными в окрестности множества неподвижных точек X^g.