Лекция 8. Теорема Лефшеца о неподвижной точке

$\boxed{\begin{array}{l}G\text{-инвариантный эллиптический оператор}\\ D \text{ на многообразии } X\end{array}} \Rightarrow \boxed{\operatorname{ind}_G D \in R(G)}$

Формула Атьи–Зингера: $\boxed{\operatorname{ind}_G D = p_*[\sigma(D)]}$, $p_* : K_G(T^*M) \to R(G)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}R(G) \subset C^\infty(G)\\ \text{представление} \mapsto \text{характер}\end{array}}$$

$$\Downarrow$$

G-индекс можно локализовать в точке $g \in G$

$\boxed{\textit{Число Лефшеца}\text{: } \operatorname{ind}_g D \equiv (\operatorname{ind}_G D)(g) = \operatorname{Tr} g|_{\ker D} - \operatorname{Tr} g|_{\operatorname{coker} D}.}$

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{ind}_G D \arrow[r, equal] \arrow[d, mapsto] & p_*[\sigma(D)] \arrow[d, mapsto] \\
\operatorname{ind}_g D \arrow[r, equal] & p_*[\sigma(D)](g)
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Задача: локализовать прямой образ } p_* \text{ в точке } g \in G}$

Теорема Атьи–Ботта–Лефшеца о неподвижной точке

Для $u \in K_G(T^*X)$ прямой образ равен:

$$\boxed{(p_*u)(g) = p'_*\left(\frac{i^*u(g)}{\lambda_{-1}(N^g \otimes \mathbb{C})(g)}\right) \in \mathbb{C}}$$

- X^g — множество неподвижных точек элемента $g \in G$ с нормальным расслоением N^g. $i : X^g \to X$ — вложение

- $x \mapsto x(g)$ — локализация в K-группе:

$$K_G(T^*X^g) \simeq K(T^*X^g) \otimes R(G) \longrightarrow K(T^*X^g) \otimes \mathbb{C}$$

- прямой образ $p'_* : K(T^*X^g) \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ индуцирован проекцией $X^g \to pt$;

- $\lambda_{-1}(N^g \otimes \mathbb{C})$ — операция: $\lambda_t(F) = \sum_k t^k \Lambda^k(F)$.

Классическая формула Лефшеца

Число Лефшеца отображения $f : M \to M$

$$L(f) = \sum_j (-1)^j \operatorname{Tr} f^*|_{H^j(M,\mathbb{R})}$$

В общем положении выражается через неподвижные точки:

$$L(f) = \sum_{f(x)=x} \operatorname{sgn}(1-df)|_x$$

Упражнение. Классическое число Лефшеца совпадает с числом Лефшеца оператора Эйлера $d + d^* : \Lambda^{ev}(M) \to \Lambda^{odd}(M)$

Будем считать G — абелева группа.

Схема локализации:

Вложение $i : X^g \subset X$ определяет диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
K_G(T^*X) \arrow[rr, "p_*"] & & R(G) \arrow[r] & \mathbb{C} \\
K_G(T^*X^g) \arrow[u, "i_*"] \arrow[r, equal] & K(T^*X^g) \otimes R(G) \arrow[ur, "p'_* \otimes id"'] & &
\end{tikzcd}$$

Подгруппы $i_* K_G(T^*X^g) \subset K_G(T^*X)$ для наших целей достаточно:

$\boxed{\textbf{после локализации вложение } i \textbf{ индуцирует изоморфизм}}$

План доказательства формулы Лефшеца:

1. обсудим локализацию K-групп;

2. сужение i^* — изоморфизм после локализации;

3. i^* и i_* — взаимно обратны по модулю $\lambda_{-1}(N^g \otimes \mathbb{C})$;

4. из предыдущих пунктов следует формула Лефшеца (по функториальности)

$$(p_* u)(g) = [p'_*(i_*)^{-1} u](g) = \ldots$$

Локализация

Локализация кольца R по простому идеалу $I \subset R$:

$$R_I = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in R,\ q \notin I \right\}$$

Пример

$R = C^\infty(M)$ с идеалом $I = C_0^\infty(M, pt)$ функций обращающихся в нуль в точке $\Rightarrow$ R_I — ростки функций в pt

В нашем случае

$g \in G \Rightarrow$ идеал $I \subset R(G)$ характеров: $\chi(g) = 0$ $\Rightarrow$ локализация $R(G)_g$

Локализация R*-модуля* M делается аналогично. Локализованный R_I-модуль обозначается через M_I.

Пример

G-пространство Y $\Rightarrow$ локализация $K_G(Y)_g$

Упражнение. Локализация сохраняет точность последовательностей.

Теорема локализации (Атья–Сигал)

> Для локально-компактного G-пространства X справедлив изоморфизм
> $$i^*: K_G(X)_g \to K_G(X^g)_g$$
> индуцированный вложением $i: X^g \subset X$

Док-во: (для простоты X — G-многообразие)

> Сначала предположим, что у g нет неподвижных точек

Будем доказывать в духе Майера–Вьеториса:

1. Для орбиты $Gx = G/H$, H — стационарная подгруппа орбиты ($h \in H \Leftrightarrow hx = x$).

$$\boxed{K_G^*(G/H) = R(H)}$$

Лемма 1. $g \notin H \subset G \Rightarrow$ *существует характер* $\chi \in R(G)$: $\chi|_H = 0, \chi(g) \neq 0$.

$$\Downarrow$$

Для орбиты верно: $\boxed{R(H)_g = 0}$ так как $\dfrac{f}{h} = \dfrac{f\chi}{h\chi}, f\chi \equiv 0$

2. Обобщение:

Если существует G-отображение $Y \to G/H$ $\Rightarrow$ $\boxed{K_G(Y)_g = 0, g \notin H}$

(искомая группа есть $R(H)_g$-модуль)

3. Обобщение: верно для относительных групп: $K_G(Y, Z)_g = 0$.

> K-группа некомпактного пространства:
> $$K_G^*(X) = \varinjlim_{U \subset X} K_G^*(U),$$
> где индуктивный предел рассматривается относительно вложений относительно компактных G-множеств.

$$\Downarrow$$

Достаточно доказать тривиальность: $K_G(K, \partial K)_g = 0$ для компакта K.

Проверка теоремы для компакта K:

1. Орбита $Gx \Rightarrow$

замкнутая трубчатая G-окрестность $V \Rightarrow$

$\exists$ G-отображение $V \to G/H$.

2. Компакт K =конечное объединение $K_i = V_i \cap K \Rightarrow$

Существуют отображения $K_i \to G/H_i \Rightarrow$

$$\boxed{K_G^*(K_i)_g = K_G^*(K_i, \partial K_i)_g = 0}$$

3. Индукцией по числу элементов покрытия получаем такие тривиальности и для всего компакта K.

$$\boxed{\text{Если у } g \text{ есть неподвижные точки } X^g}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{последовательность пары } X^g \to X: \\ \\ \leftarrow K_G^1(X \setminus X^g) \leftarrow K_G(X^g) \leftarrow K_G(X) \leftarrow K_G(X \setminus X^g)\end{array}}$$

После локализации получаем искомое:

$$K_G^*(X)_g \simeq K_G^*(X^g)_g.$$

$\square$

Лемма 2. $X^g \subset X$ *— гладкое подмногообразие.*

Док-во.

1) Пусть $x \in X^g$, выберем G-инвариантную метрику.

2) $g : T_x X \to T_x X$

$$\boxed{g\xi = \xi} \Leftrightarrow \boxed{\text{геодезическая отвечающая } \xi \text{ лежит в } X^g}$$

3) $\Rightarrow X^g$ — подмногообразие и $\boxed{\det(1-g)|_{N^g_x} \neq 0}$.

N^g — нормальное расслоение X^g.

$\square$

Предл. Локализация прямого образа $i_* : K_G(TX^g)_g \to K_G(TX)_g$ отвечающего вложению $i : X^g \subset X$ является изоморфизмом и

$$(i_*)^{-1} u = \left[\frac{i^* u}{\lambda_{-1}(N^g \otimes \mathbb{C})}\right]$$

Док-во. 1) $x \in K_G(TX^g)_g$:

$$i^* i_* x = i^*((\text{класс Тома}) \cdot x) = \left[\Lambda^{ev}(N^g \otimes \mathbb{C}) - \Lambda^{odd}(N^g \otimes \mathbb{C})\right] x$$
$$= \lambda_{-1}(N^g \otimes \mathbb{C}) x.$$

2) проверим обратимость элемента

$$\lambda_{-1}(N^g \otimes \mathbb{C}) \in K_G(X^g)_g = K(X^g) \otimes R(G)_g$$

$$\boxed{u \in K_G(X^g)_g \text{ — обратим}} \Leftrightarrow \boxed{\forall x \in X^g : u|_x \in R(G)_g \text{ — обратим}}$$

— следует из результата в $K(X^g)$.

Достаточно проверить обратимость характера в точке:

$$\chi(g) = \sum (-1)^k \operatorname{Tr} g|_{\Lambda^i N \otimes \mathbb{C}} = \det(1-g)|_N \neq 0.$$

$\square$

для тривиального G-пространства Y гомоморфизм $u \mapsto u(g)$:

$$\begin{array}{ccc} K_G(Y) & \longrightarrow & K(Y)\otimes\mathbb{C} \\ x\otimes\chi & \mapsto & x\chi(g) \end{array}$$

Теорема Лефшеца о неподвижной точке

- X — замкнутое G-многообразие;
- X^g — множество неподвижных точек элемента $g \in G$ с нормальным расслоением N^g.

Прямой образ элемента $u \in K_G(T^*X)$ при проекции в точку равен:

$$\boxed{(p_*u)(g) = p'_*\left(\frac{i^*u(g)}{\lambda_{-1}(N^g\otimes\mathbb{C})(g)}\right) \in \mathbb{C}}$$

прямой образ $p'_* : K(T^*X^g)\otimes\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ индуцирован проекцией $X^g \to pt$.

Док-во. Формула вытекает из коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd} K_G(T^*X)_g \arrow[r, "p_*"] & K_G(pt)_g \arrow[r] & \mathbb{C} \\ K_G(T^*X^g)_g \arrow[u, "i_*"] \arrow[ur, "p'_*"'] & & \end{tikzcd}$$

т.е. $p_* = p'_*(i_*)^{-1}$ и выражения для $(i_*)^{-1}$. $\square$

Следствие. Для эллиптического оператора $D : C^\infty(X,E) \longrightarrow C^\infty(X,F)$ с разностным элементом $u \in K_G(T^*X)$

$$\boxed{\operatorname{ind}_g D = \operatorname{ind}\left[\lambda_{-1}(N^g\otimes\mathbb{C})^{-1} i^*u(g)\right]}$$

Далее частные случаи и приложения.

Частный случай (оператор Эйлера)

$$D_M = d + d^* : \Lambda^{ev}(M) \longrightarrow \Lambda^{odd}(M).$$

$TM|_{X^g} \simeq TX^g \oplus N^g \Rightarrow$

$i^*[\sigma(D_M)] = [\sigma(D_{X^g})]\lambda_{-1}(N^g \otimes \mathbb{C}) \Rightarrow$

$$\boxed{\operatorname{ind}_g D_M = \operatorname{ind}[\sigma(D_{X^g})] = \chi(X^g)}$$

Частный случай (изолированные неподвижные точки)

$i : p \to X$ — вложение неподвижной точки, $i^* : K_G(TX) \to R(G)$

$i^* u(g) = \operatorname{Tr} g|_{E_p} - \operatorname{Tr} g|_{F_p} \Rightarrow$

$$\operatorname{ind}_g D = \sum_p \frac{\operatorname{Tr} g|_{E_p} - \operatorname{Tr} g|_{F_p}}{\det(1-g)|_{T_pX}}$$

(не зависит от оператора)

Следствие (теорема целочисленности) Если $g \in \mathbb{Z}_n \Rightarrow$

$$\sum_p \frac{\operatorname{Tr} g|_{E_p} - \operatorname{Tr} g|_{F_p}}{\det(1-g)|_{T_pX}} \in \mathbb{Z}[\xi], \quad \xi = \sqrt[n]{-1}.$$

Число Лефшеца определено для любого отображения !

Опр. гладкое $f : X \to X$ — *регулярное отображение* $\Leftrightarrow$ $\det(1 - df) \neq 0$ при $f(x) = x$

Регулярность $\Rightarrow$ неподвижные точки изолированные

Формула Атьи–Ботта–Лефшеца

$$L(D, f) = \operatorname{Tr} f^*|_{\ker D} - \operatorname{Tr} f^*|_{\operatorname{coker} D} = \sum_{f(p)=p} \frac{\operatorname{Tr} f^*|_{E_p} - \operatorname{Tr} f^*|_{F_p}}{|\det(1-df)|_{T_pX}}$$

Действия конечных групп и дефекты сигнатуры

G — конечная группа действует на M. Пусть M/G — гладкое многообразие

$\boxed{D \text{ — } G\text{-инвариантн. оператор}} \Rightarrow \boxed{\text{оператор } \widetilde{D} \text{ на } M/G}$

$\dim\ker\widetilde{D}$ — кратность тривиального представления в $\ker D$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\operatorname{ind}\widetilde{D} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\operatorname{ind}_g D}$$

Приложение:

1. Действие свободно $\Rightarrow$ мультипликативность индекса $|G|\operatorname{ind}\widetilde{D} = \operatorname{ind} D$.
2. Действие не свободно $\Rightarrow$

правая часть равенства — определение индекса оператора на (возможно) особом факторпространстве

Применение к сигнатуре: G — действует на M сохраняя ориентацию $\Rightarrow$

$$\operatorname{sign} M/G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\operatorname{sign}_g M$$

Немультипликативность сигнатуры: $|G|\operatorname{sign} M/G - \operatorname{sign} M$:

$$|G|\operatorname{sign} M/G - \operatorname{sign} M = \sum_{gx=x}\operatorname{def-sign}_x$$

Дефект сигнатуры (для изолированных точек) $\operatorname{def-sign}_x$.
Матрица ортогонального преобразования $g: T_xM \to T_xM$ есть

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}\cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2\\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2\end{pmatrix}\dots$$

Упражнение. Формула Лефшеца дает:

$$\boxed{\operatorname{def-sign}_x = -\sum_{g\in G_x}\prod_i \operatorname{ctg}(\alpha_{g,x,i}/2)}$$

(G_x — стационарная подгруппа точки).

Указание: **мультипликативность** оператора сигнатуры $D_{M\times N} = D_M \# D_N \Rightarrow$ достаточно проверить равенство в двумерном случае.

Действия на многообразиях

Теорема

Группа $\mathbb{Z}_{p^r}$, p — нечетное простое, действует на ориентируемом замкнутом многообразии	$\Rightarrow$	Неподвижных точек или нет или не меньше двух

Док-во. (от противного)

Пусть только одна неподвижная точка $p \in X$.

Из условия $\Rightarrow$ многообразие четномерно и ориентация сохраняется.

Пусть $g = e^{\frac{2\pi i}{p^r}}$ — образующая.

Касательное пространство T_pX — сумма двумерных инвариантных подпространств с комплексными собственными значениями g^k и $g^{-k} \neq \pm 1 \Rightarrow$

$$\operatorname{ind}_g D = \prod_k \frac{1+g^k}{1-g^k} \in \mathbb{Z}[g].$$

(D — оператор сигнатуры).

Отсюда получаем:

$$\operatorname{ind}_g D \prod_k (1-g^k) = \prod_k (2-(1-g^k)) \in \mathbb{Z}[g].$$

В факторкольце $\mathbb{Z}[g]/(g-1) \simeq \mathbb{Z}$ это равенство противоречиво:

- левая часть равна нулю;
- правая часть равна 2^n.

$\square$