Лекция 9. Характеристические классы

$\boxed{\text{Хотим построить инварианты расслоений, которые позволяли бы различать неизоморфные расслоения}}$

Опр. $\boxed{\textit{Характеристический класс } \omega \text{ векторных расслоений}}$

$$\Updownarrow$$

для любого расслоения E над базой X класс когомологий $\omega(E) \in H^*(X)$, который *естественный*:

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & E \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd} \Rightarrow \omega(f^*E) = f^*(\omega(E))$$

Будем рассматривать комплексные расслоения (вещественные — в конце лекции).

$$\boxed{\mathrm{Vect}^n(X) = [X, \mathbf{BU}(n)]}$$

$\mathbf{BU}(n) = Gr_{n,\infty}$ — грассманиан n-плоскостей в $\mathbb{C}^\infty$ (*классифицирующее пространство*).

$$\Downarrow$$

Теорема. $\boxed{\{\text{кольцо характ. классов}\} \simeq H^*(\mathbf{BU}(n))}$

Док-во. Пусть γ_n — тавтологическое расслоение n-плоскостей над грассманианом $Gr_{n,\infty}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ характ. классу ω сопоставляем $\omega(\gamma_n) \in H^*(\mathbf{BU}(n))$;

$\boxed{\Leftarrow}$ $y \in H^*(\mathbf{BU}(n))$ определяет хар. класс $\omega(E) = f^*(y)$, для классифицирующего отображения $f : X \to \mathbf{BU}(n)$.

Построенные отображения взаимно обратны. $\square$

Характеристические классы Черна

Теорема. $\boxed{H^*(\mathbf{BU}(n)) = \mathbb{Z}[c_1, c_2, \dots, c_n],\ \deg c_i = 2i}$

Зафиксируем образующие дополнительными условиями.

Теорема-Определение.

Классы Черна расслоений $E \in \mathrm{Vect}(X)$

$$c_i(E) \in H^{2i}(X), i = 0, 1, 2, \dots, \qquad c_0(E) = 1$$

однозначно определяются условиями:
1) (формула Уитни)

$$\boxed{c(E \oplus F) = c(E)c(F)}$$

здесь $c(E) = \sum_0^\infty c_i(E)$ — полный класс Черна;
2) (нормировка)

$$\boxed{c(\gamma_1) = 1 - g}$$

$\gamma_1 \in \mathrm{Vect}(\mathbb{CP}^\infty)$ — тавтологическое расслоение, $\mathbb{CP}^\infty = \mathbf{BU}(1)$,
$g \in H^2(\mathbb{CP}^\infty) = \mathbb{Z}$ — образующая.

Док-во. Единственность

1) Для линейного расслоения E классифицируемого $f : X \to \mathbb{CP}^\infty$:
(нормировка) $\Rightarrow c(E) = f^*c(\gamma_1)$

2) Для разложимого расслоения $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$, $\qquad x_i = c_1(E_i)$:
(формула Уитни) $\Rightarrow c(E_1 \oplus \ldots E_n) = (1 + x_1) \ldots (1 + x_n)$

3) Для произвольного расслоения E. Пользуемся принципом расщепления (существует отображение $f : Y \to X$, что f^*E — расщепляется и $f^* : H^*(X) \to H^*(Y)$ — мономорфизм) $\Rightarrow$ единственность классов Черна.

Существование для разложимых расслоений:

$$c(E_1 \oplus \ldots E_n) = (1 + x_1) \ldots (1 + x_n), \qquad x_i = c_1(E_i)$$

в общем случае построим классы, следуя подходу Бореля–Хирцебруха.

Формализм Бореля–Хирцебруха

Вложение тора $j : \mathbf{T}^n \subset \mathbf{U}(n)$ (диагональные матрицы)

$\Downarrow$

Вложение $\mathbf{BT}^n \subset \mathbf{BU}(n)$ классифицирующих пространств, где

$$\mathbf{BT}^n = \underbrace{\mathbb{CP}^\infty \times \ldots \mathbb{CP}^\infty}_{n}$$

— классифицирует суммы линейных расслоений.

Теорема (Борель–Хирцебрух)

Отображение $j^* : H^*(\mathbf{BU}(n)) \to H^*(\mathbf{BT}^n)$ — мономорфизм. Его образ в $H^*(\mathbf{BT}^n) = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ состоит из симметричных полиномов.

Элементы $x_i \in H^2(\mathbf{BT}^n)$ называются *образующими Ву.*

Формализм Бореля–Хирцебруха:

характеристический класс $\Leftrightarrow$ симметрический полином от образующих Ву

Опр'. *Классами Черна* (расслоений размерности n) называются элементарные симметрические функции от образующих Ву:

$$c_0 = 1$$
$$c_1 = x_1 + \ldots + x_n$$
$$c_2 = \sum_{i<j} x_i x_j$$
$$\ldots$$
$$c_n = x_1 \ldots x_n$$
$$c = (1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n)$$

Свойства.

1. $c_i(E) = 0$ при $i > \dim E$.
2. (стабильность) $c(E \oplus \mathbf{1}) = c(E)$

Пример $c(T\mathbb{CP}^n) = ?$

$T\mathbb{CP}^n \oplus \mathbf{1} \simeq (n+1)\gamma^* \Rightarrow \boxed{c(T\mathbb{CP}^n) = (1+g)^{n+1}}$

Операции над расслоениями и классы Черна

Дано. Операция α над векторными расслоениями $(\overline{E}, \Lambda(E), \Lambda^{ev}(E), \dots)$.

Требуется вычислить характ. класс $c(\alpha(E))$ через класс Черна $c(E)$.

$\boxed{\text{Любой характеристический класс есть полином от классов Черна}}$

Можно многоместные операции.

Решение:

1. Для разложимого расслоения E выразить класс Черна через образующие Ву. Полученный симметрический полином есть полином от элементарных симметрических полиномов — классов Черна E.

2. Доказательство соотношения в общем случае следует из принципа расщепления.

Примеры

1. Операция $E \mapsto \overline{E}$:

$$c(\overline{E}) = \prod_j c(\overline{E}^j) = \prod_j (1 - x_j) =$$

$$\sum (-1)^j \sigma_j(x_1, \dots, x_n) = \sum (-1)^j c_j(E). \quad (1)$$

$$\boxed{c(\overline{E}) = \sum (-1)^j c_j(E)}$$

2. Операция $E, F \mapsto E \otimes F$:

$E \otimes F = \sum E_i \otimes F_j$

$$c(E \otimes F) = \prod_{i,j} c(E^i \otimes F^j) = \prod_{i,j} (1 + x_i + y_j)$$

(здесь $c_1(E \otimes F) = c_1(E) + c_1(F)$ для одномерных расслоений)

Например,

$$\boxed{c(E \otimes F) = 1 + \dim F c_1(E) + \dim E c_1(F) + \dots}$$

3. Операция $E \mapsto \Lambda^2(E)$

$$c(\Lambda^2(E)) = \prod_{i<j} c(E_i \otimes E_j) = \prod_{i<j} (1 + x_i + x_j) \dots$$

(пользуемся формулой Картана: $\Lambda^k(E \oplus F) = \sum_{i+j=k} \Lambda^i(E) \otimes \Lambda^j(F)$)

Характер Черна

Хотим построить гомоморфизм колец $K(X) \to H^*(X)$:

1) $\mathrm{ch}(E \oplus F) = \mathrm{ch}(E) + \mathrm{ch}(F)$,

2) $\mathrm{ch}(E \otimes F) = \mathrm{ch}(E)\,\mathrm{ch}(F)$

Аддитивный характ. класс: $f(E \oplus F) = f(E) + f(F)$	$\Leftrightarrow$	$f(E) = \sum_i f(x_i)$ для формального степенного ряда $f(x) = a + bx + cx^2 \ldots$

$\boxed{\text{Мультипликативность}} \Leftrightarrow \boxed{f(x+y) = f(x)f(y)} \quad f(x) = e^x$

Характер Черна

$$\mathrm{ch}(E) = \sum e^{x_j} = n + \sum x_i + \frac{\sum x_i^2}{2} + \frac{\sum x_i^3}{6} + \ldots \in H^{ev}(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

$$\mathrm{ch}(E) = \dim E + c_1 + \frac{c_1^2 - 2c_2}{2} + \frac{c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3}{6} + \\ + \frac{c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 4c_1c_3 + 2c_2^2 - 4c_4}{24} \cdots .$$

Теорема

Характер Черна

$$\begin{aligned} \mathrm{ch} : K(X) \otimes \mathbb{Q} &\longrightarrow H^{ev}(X, \mathbb{Q}) \\ \mathrm{ch}([E] - [F]) &= \mathrm{ch}\, E - \mathrm{ch}\, F \end{aligned}$$

является изоморфизмом.

Док-во (схема).

Применяем принцип Майера–Вьеториса:

- сначала проверяем изоморфизм над точкой и над сферами;
- затем проводим индукцию по числу клеток пространства X.

Индукцию можно сделать, так как характер Черна продолжается на нечетные группы: $\mathrm{ch} : K^1(X) \to H^{odd}(X, \mathbb{Q})$ и относительные K-группы.

$\square$

Приложение (целочисленность Ботта)

$$\boxed{E \in \mathrm{Vect}(\mathbb{S}^{2n})} \Rightarrow \boxed{\frac{c_n(E)}{n!} \in H^{2n}(\mathbb{S}^{2n}, \mathbb{Z}) \subset H^{2n}(\mathbb{S}^{2n}) \otimes \mathbb{Q}}$$

Док-во.

$$K(\mathbb{S}^{2n}) = K_c(\mathbb{R}^{2n}) \oplus \mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{достаточно проверить на} \\ \text{образующей } \underbrace{b\#b\#\ldots\#b}_{n},\ b \in K(\mathbb{R}^2)\end{array}}$$

$$\mathrm{ch}\left(\underbrace{b\#b\#\ldots\#b}_{n}\right) = (\mathrm{ch}\, b)^n,$$

$$\mathrm{ch}\, b + 1 = c(b) = 1 + g \in H^{ev}(\mathbb{S}^2)$$

$\square$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Когомологическая форма формулы Атьи–Зингера:} \\ \\ \mathrm{ind}\, D = \langle \mathrm{ch}[\sigma(D)]\pi^* Td(T^*M \otimes \mathbb{C}), [T^*M] \rangle\,, \quad \pi : T^*M \to M \\ \end{array}}$$

- $[\sigma(D)] \in K_c(T^*M)$ — разностный элемент эллиптического символа;
- T^*M ориентировано как симплектическое $(x_1, p_1, x_2, p_2, \ldots)$;
- Класс Тодда Td комплексного расслоения E

$$Td(E) = \prod_j \frac{1 - e^{x_j}}{x_j}$$

- $\langle , \rangle : H_c^{ev}(T^*M) \times H_{c,ev}(T^*M) \longrightarrow \mathbb{Z}$.

В следующий раз мы выведем эту формулу из K-теорной и вычислим ее для геометрических операторов.

Вещественные расслоения

Теорема $H^*(\mathbf{BO}(n), \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}[p_1, \dots p_{n/4}]$

Классы Понтрягина: $\boxed{p_j(E) = (-1)^j c_{2j}(E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \in H^{4j}(X)}$

Полный класс Понтрягина $p(E) = 1 + p_1(E) + p_2(E) \dots$:

1) $p(E \oplus F) = p(E)p(F)$ mod 2-кручение;
2) $p(\gamma_{\mathbb{R}}) = 1 + g^2$, где $\gamma_{\mathbb{R}}$ — овеществление

Формализм Бореля–Хирцебруха

Расщепление в вещественном случае:

$$E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq l_1 \oplus \bar{l}_1 \oplus l_2 \oplus \bar{l}_2 \oplus \dots.$$

$c(l_j) = 1 + x_j, c(\bar{l}_j) = 1 - x_j \Rightarrow$

$$p(E) = (1 + x_1^2)(1 + x_2^2) \dots.$$

$\boxed{\text{четный (по всем переменным) полином от образующих Ву}} \Leftrightarrow \boxed{\text{хар. класс вещественных расслоений}}$

Ориентированные расслоения

Теорема $H^*(\mathbf{BSO}(n), \mathbb{Q}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Q}[p_1, \dots p_{n/4}] & \text{если } n \text{ нечетно} \\ \mathbb{Q}[p_1, \dots p_{n/4}, \chi] & \text{если } n \text{ четно} \end{cases}$

Класс Эйлера χ четномерного расслоения E:

$$\boxed{\chi(E) = x_1 x_2 \dots x_n} \qquad \dim E = 2n.$$

Класс Эйлера нестабилен: $\chi(E \oplus \mathbf{2}) = 0$!

Приложение

Числа Понтрягина ориентированного многообразия:

$$p_I(M) = \langle p_{i_1}(M) p_{i_2}(M) \dots, [M] \rangle \in \mathbb{Z}, \qquad p_i(M) \stackrel{\text{def}}{=} p_i(TM).$$

Утв. $\boxed{M = \partial W} \Rightarrow \boxed{\text{числа Понтрягина равны нулю}}$

Док-во: По формуле Стокса:

$\langle p_{i_1}(M) p_{i_2}(M) \dots, [\partial W] \rangle = \langle d(p_{i_1}(W) p_{i_2}(W) \dots), [W] \rangle = 0$ □

Теорема Тома. Если все числа Понтрягина нулевые, то $\exists n$ такое что nM ограничивает.

Например, для M^4 есть только $p_1(M)$.

Другие подходы к характеристическим классам

1. Теория особенностей.

Пусть M — комплексное замкнутое многообразие ($\dim_{\mathbb{C}} M = n$).

$$\boxed{k \text{ векторных полей } (k \le n) \text{ общего положения}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{множество особенностей } \Sigma, \text{ где поля линейно-зависимы —}\\ 2(k-1)\text{-мерный цикл}\end{array}}$$

$$\boxed{c_{n-k+1}(TM) = P.D.[\Sigma] \in H^{2(n-k+1)}(M)}$$

$P.D. : H_{2(k-1)}(M) \to H^{2(n-k+1)}(M)$ — двойственность Пуанкаре.

Например, при $k = 1$

$\Rightarrow \Sigma$ — особенности векторного поля

$\Rightarrow P.D.[\Sigma] =$ (число (со знаками) особых точек поля)$[M]$.

2. Дифференциальная геометрия (подход Черна–Вейля).

Опр. *Связность в расслоении* это оператор

$$\nabla : C^\infty(M, E) \longrightarrow C^\infty(M, T^*M \otimes E)$$

такой что $\nabla(fu) = dfu + f\nabla u$.

- связность есть всегда (локальный вид $d + \alpha, \quad \deg \alpha = 1$);
- связность продолжается на формы: $\nabla(\omega u) = d\omega u + (-1)^{\deg \omega} \omega \nabla u$

$\Omega = \nabla^2$ — *кривизна связности* (оператор нулевого порядка: 2-форма).

$$\boxed{\operatorname{ch} E = \operatorname{Tr} \exp\left(\frac{\Omega}{2\pi i}\right) \in H^{ev}(M, \mathbb{C})}$$

3. Алгебраический подход.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Расслоение — образ проектора:}\\ E = \operatorname{Im} P\end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{связность } Pd \text{ с формой}\\ \text{кривизны } \Omega = PdP \wedge dP\end{array}}$$

$\Rightarrow$

$$\operatorname{ch} E = \operatorname{Tr} e^{\frac{\Omega}{2\pi i}} = \operatorname{Tr} P + \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Tr} PdP \wedge dP + \ldots \in H^{ev}(M, \mathbb{C})$$