Лекция 10. Когомологическая формула индекса

$p_! = \operatorname{ind} : K_c(T^*M) \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad K_c(T^*M) \otimes \mathbb{Q} \overset{\mathrm{ch}}{\simeq} H_c^{ev}(T^*M, \mathbb{Q})$

$p_!$ — прямой образ в K-теории

$\boxed{\text{Хотим выразить индекс в когомологических терминах}}$

класс Тодда комплексного расслоения

$$\operatorname{Td}(E) = \prod_k \frac{x_k}{1 - e^{-x_k}}$$

Когомологическая формула индекса:

$$\operatorname{ind} D = p_![\sigma(D)] = \langle \operatorname{ch}[\sigma(D)] \operatorname{Td}(TM \otimes \mathbb{C}), [T^*M] \rangle$$

(ориентация $p_1, x_1, p_2, x_2, \ldots$)

$\boxed{M^n \text{ — ориентировано}} \Rightarrow$ *изоморфизм Тома* в когомологиях:

$i_* : H^*(M) \to H_c^{*+n}(TM), i : M \to TM$

Формула индекса на базе

$$\boxed{\operatorname{ind} D = (-1)^{n(n-1)/2} \langle i_*^{-1}(\operatorname{ch}[\sigma(D)]) \operatorname{Td}(TM \otimes \mathbb{C}), [M] \rangle}$$

$(-1)^{\cdots} i_*^{-1} \operatorname{ch}[\sigma(D)] = \operatorname{ch} D$ — *характер Черна оператора*

Теорема целочисленности

$$\boxed{\langle x \operatorname{Td}(TM \otimes \mathbb{C}), [M] \rangle \in \mathbb{Z}}$$

если $x \in H^*(M, \mathbb{R})$ лежит на решетке $i_*^{-1} \operatorname{ch}(K_c(TM)) \subset H^*(M, \mathbb{R})$

Характер Черна оператора ассоциированного с G-структурой

G — группа Ли и $G \to \mathbf{SO}(k)$ — гомоморфизм.

Определение

$\boxed{G\text{-структура на многообразии } M^k} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{поднятие функций перехода касательного}\\ \text{расслоения из } \mathbf{SO}(k) \text{ до } G\text{:}\\ \varphi_{i,j} : U_i \cap U_j \to \mathbf{SO}(k) \rightsquigarrow \widetilde{\varphi}_{i,j} : U_i \cap U_j \to G\end{array}}$

Теорема. Замкнутое ориентированное многообразие X, $\dim X = 2m$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Для эллиптического символа } \sigma : \pi^*E \to \pi^*F \text{ имеем}\\[1em] i_*^{-1} \operatorname{ch} \sigma = \dfrac{\operatorname{ch} E - \operatorname{ch} F}{\chi(TX)}\end{array}}$$

если:

- символ *ассоциирован с G-структурой* (см. ниже)
- образ класса Эйлера χ при отображении $H(B\mathbf{SO}(2m), \mathbb{Q}) \to H(BG, \mathbb{Q})$ отличен от нуля.

<u>Символ ассоциированный с G-структурой:</u>

$\boxed{\text{представление } \rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{C}^n)} \Rightarrow \boxed{\text{расслоение } EG \times_G \mathbb{C}^n \in \operatorname{Vect}(BG)}$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{гомоморфизм } G\text{-модулей } \alpha :\\ M \to N \text{ обратимый вне нуля}\end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}[\alpha] \in K_c(TBG)\\ \text{здесь } TBG = EG \times_G \mathbb{R}^k\end{array}}$

Опр. $\boxed{\begin{array}{l}\text{Символ } \sigma \text{ на } X\\ \textit{ассоциирован с}\\ G\textit{-структурой}\end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\sigma \text{ индуцирован классифиц. отображением}\\ f : X \to BG \text{ из символа } \alpha \text{ над } BG\end{array}}$

<u>**Док-во Теоремы**</u>.

Достаточно рассмотреть универсальный случай $\pi : TBG \to BG$, $i : BG \subset TBG$

Для $x \in H(BG)$ имеем $i^* i_* x = \chi(TBG) x \Rightarrow$

$$\boxed{\chi(TBG)\pi_* \operatorname{ch} \sigma = i^* i_* \pi_* \operatorname{ch} \sigma = i^* \operatorname{ch} \sigma = \operatorname{ch} E - \operatorname{ch} F}$$

$\chi(TBG) \neq 0$ $\Downarrow$ в $H(BG, \mathbb{Q})$ нет делителей нуля (Борель)

$$\boxed{\text{можно поделить на } \chi(TBG)}$$

Отсюда получаем требуемую формулу. □

Оператор Эйлера

$$\boxed{d + d^* : \Lambda^{ev}(M) \longrightarrow \Lambda^{odd}(M)}$$

($G = \mathbf{SO}(2m)$, модули $\Lambda^{ev/odd}(\mathbb{R}^{2m})$)

$$(-1)^m i_*^{-1} \operatorname{ch}(d + d^*) = (-1)^m \frac{\operatorname{ch} \Lambda^{ev}(TM \otimes \mathbb{C}) - \operatorname{ch} \Lambda^{odd}(TM \otimes \mathbb{C})}{\chi(TM)} =$$

$$= \prod_k \frac{(1 - e^{x_k})(1 - e^{-x_k})}{-x_k} = \chi(TM) \operatorname{Td}(TM \otimes \mathbb{C})$$

Пользуемся соотношениями:

$$\Lambda^{ev}(E) - \Lambda^{odd}(E) = \lambda_{-1}(E) = \sum_k t^k \Lambda^k(E) \Big|_{t=-1}.$$

$$\boxed{\lambda_t(E \oplus F) = \lambda_t(E)\lambda_t(F)} \Rightarrow \boxed{\operatorname{ch} \lambda_t(E) = \textstyle\prod_k (1 + te^{x_k})}$$

Формула для эйлеровой характеристики:

$$\operatorname{ind}(d + d^*) = \chi(M) = \langle \chi(TM), [M] \rangle$$

Замечание. Класс Черна сидит в старшей размерности $\Rightarrow$

$$\operatorname{ind}(d + d^*) \otimes 1_E = \chi(M) \dim E.$$

Оператор Дольбо

M^{2n} — комплексно-аналитическое многообразие

Оператор Дольбо:

$$\overline{\partial} + \overline{\partial}^* : \Lambda^{0,ev}(M) \longrightarrow \Lambda^{0,odd}(M)$$

$(G = \mathbf{U}(n) \subset \mathbf{SO}(2n)$, модули $\Lambda^{ev/odd}(\mathbb{C}^n))$

$$i_*^{-1}\operatorname{ch}[\sigma(\overline{\partial}+\overline{\partial}^*)] = \frac{\operatorname{ch}\Lambda^{ev}(TM) - \operatorname{ch}\Lambda^{odd}(TM)}{\chi(TM)} = \\ = \prod_k \frac{(1-e^{x_k})}{x_k} = (-1)^n(\operatorname{Td}(\overline{TM}))^{-1}$$

$$(-1)^n i_*^{-1}\operatorname{ch}[\sigma(\overline{\partial}+\overline{\partial}^*)]\operatorname{Td}(TM\otimes\mathbb{C}) = \\ = (\operatorname{Td}(\overline{TM}))^{-1}\operatorname{Td}(TM\oplus\overline{TM}) = \operatorname{Td}(TM) \Rightarrow$$

(используем $E\otimes\mathbb{C} \simeq E\oplus\overline{E}$)

Теорема Римана–Роха–Хирцебруха

$$\operatorname{ind}(\overline{\partial}+\overline{\partial}^*)\otimes 1_E = \chi(M,E) = \langle \operatorname{ch} E\operatorname{Td}(TM), [M]\rangle$$

E — голоморфное расслоение на M

Оператор сигнатуры

$$\boxed{D = d + d^* : \Lambda^+(M) \longrightarrow \Lambda^-(M)} \qquad \alpha|_{\Lambda^\pm(M)} = \pm Id,$$

$\alpha|_{\Lambda^k(M^{2m})} = i^{k(k-1)+m} *$ — инволюция.

($G = \mathbf{SO}(2m)$, модули $\Lambda^\pm(\mathbb{R}^{2m})$)

$$i_*^{-1} \operatorname{ch}[\sigma(D)] = \frac{\operatorname{ch}\Lambda^+(M) - \operatorname{ch}\Lambda^-(M)}{\chi(TM)}$$

$TM = E_1 \oplus \ldots \oplus E_m, E_k \otimes \mathbb{C} \simeq l_k \oplus \bar{l}_k$.

$$= \prod_k \frac{\operatorname{ch}\Lambda^+(E_k) - \operatorname{ch}\Lambda^-(E_k)}{\chi(E_k)} = \prod_k \frac{\operatorname{ch}\bar{l}_k - \operatorname{ch} l_k}{x_k}$$

(последнее равенство — прямое вычисление $\Lambda^\pm$ в двумерном случае)

$$(-1)^m i_*^{-1} \operatorname{ch}[\sigma(D)] = \prod_k \frac{e^{-x_k} - e^{x_k}}{-x_k} =$$

$$= \prod_k \frac{x_k}{\operatorname{th} x_k/2} \frac{(1-e^{x_k})(1-e^{-x_k})}{-x_k^2} \equiv L_2(M) \operatorname{Td}^{-1}(TM \otimes \mathbb{C})$$

Формула Хирцебруха:

$$\operatorname{ind} D = \operatorname{sign} M^{4n} = \langle L(M), [M] \rangle, \qquad L(M) = \prod_k \frac{x_k}{\operatorname{th} x_k}$$

$$\operatorname{sign} M^4 = \frac{p_1[M]}{3} \qquad \operatorname{sign} M^8 = \frac{7p_2[M] - p_1^2[M]}{45}$$

Индекс оператора с коэффициентами:

$$\boxed{\operatorname{ind} D \otimes 1_E = \langle \operatorname{ch}(E) L_2(M), [M] \rangle}$$

Частный случай

$\boxed{M \text{ — } \textit{почти параллелизуемо}} \Leftrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}\text{касательное расслоение}\\ \text{над } M \setminus pt \text{ тривиально}\end{array}}$

$\Rightarrow p_1 = p_2 = \dots p_{n-1} = 0, \dim M = 4n$

$$\boxed{\operatorname{sign} M = 2^{2n}(2^{2n-1} - 1)\frac{B_n}{(2n)!}p_n[M]}$$

B_n — число Бернулли: $x/(1 - e^{-x}) = 1 + x/2 + \sum(-1)^{n-1}B_n x^{2n}/(2n!)$

Из этой формулы $\Rightarrow$ делимость $p_n[M]$ на огромное число:

$$n = 3 \Rightarrow B_3 = \frac{1}{42}, \operatorname{sign} M^{12} = \frac{4 \cdot 31}{3^2 \cdot 5 \cdot 7}p_3[M^{12}]$$

Кервер–Милнор построили элементы большого конечного порядка в стабильных гомотопических группах сфер $\pi_{4n-1+m}(\mathbb{S}^m)$

Семимерные сферы Милнора

Построим M^8 из трех клеток $M^8 \sim e_0 \cup e_4 \cup e_8$ $\dim e_k = k$

Тогда $\mathbb{S}^4 \subset U \subset M^8$:

$U \simeq E$ — четырехмерное вещественное расслоение над $\mathbb{S}^4$

E классифицируется $\pi_3(\mathbf{SO}(4)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ и порождается

$$f(x)y = x^i y x^j, \qquad |x| = 1, x, y \in \mathbb{H}$$

$SE \subset E$ — сферическое расслоение.

Лемма. $SE \simeq \mathbb{S}^7$ — гомотопическая сфера, если $i + j = 1$

Док-во. Теория Морса: M гомеоморфно сфере $\Leftrightarrow$ существует функция с одним невырожденным минимумом и максимумом (Риб).

$$SE = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{S}^3 \cup \mathbb{R}^4 \times \mathbb{S}^3$$

$$(u, v) \longmapsto \left(\frac{u}{|u|^2}, \frac{u^i v u^j}{|u|} \right)$$

Требуемую функцию можно предъявить (критич. точки $(0, \pm 1)$):

$$f(u, v) = \frac{\mathrm{Re}\; v}{\sqrt{1 + |u|^2}}$$

$\square$

Предположим, что SE диффеоморфно $\mathbb{S}^7 \Rightarrow M^8 = E \cup_{SE = \mathbb{S}^7} \overline{\mathbb{D}}^8$:

p_1 — определяется E

$$\boxed{p_1 = 2(2i - 1) \times (\text{образующая } H^4(M^8))}$$

Формула Хирцебруха дает:

$$\boxed{1 = \frac{7p_2 - p_1^2}{45} \Rightarrow p_2 = \frac{4(2i-1)^2 + 45}{7}}$$

При $i = 2$ имеем $p_2 = 81/7$ — противоречие!!!

Поэтому сфера SE — экзотическая.

Оператор Дирака

ориентируемость	оператор сигнатуры	$K(M)\otimes\mathbb{Q}\simeq K(TM)\otimes\mathbb{Q}$
компл. структура	оператор Дольбо	$K(M)\simeq K(TM)$

Оказывается, изоморфизм Тома определен в более широких рамках.

Соответствующий оператор — *оператор Дирака*
(его символ — образующая в $K(TM)$)

<u>Локальная конструкция:</u>

$\mathbf{U}(n)$ действует на комплексе де Рама:

$$\Lambda^{ev}(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\varphi_v} \Lambda^{odd}(\mathbb{C}^n), \quad \varphi_v = v\wedge + (v\wedge)^* \text{ для } v\in\mathbb{C}^n.$$

Тогда имеем $x\varphi_v x^{-1}=\varphi_{xv}$.

Введем максимальную группу симметрий комплекса:

Опр. $\mathbf{Spin}^c(2n)$ — *комплексная спинорная группа* унитарных элементов x из $\operatorname{End}\Lambda^*(\mathbb{C}^n)$ сохраняющих четность форм таких что

$$\forall v \quad \exists w\in\mathbb{C}^n : x\varphi_v x^{-1}=\varphi_w.$$

<u>Свойства:</u>

1. точная последовательность

$$\begin{array}{ccccc} 0\to\mathbb{S}^1\to\mathbf{Spin}^c(2n) & \to & \mathbf{SO}(2n)\to 0 \\ v & \mapsto & w \end{array}$$

2. $\mathbf{U}(n)\subset\mathbf{Spin}^c(2n)$ — общий элемент не сохраняет степень формы!

<u>Глобализация:</u> $\boxed{\text{На } M^{2n} \text{ задана } \mathbf{Spin}^c\text{-структура}}$ $\Rightarrow$

- *комплексное спинорное расслоение* $\mathcal{S}M=\mathcal{S}^+M\oplus\mathcal{S}^-M$ (склейка $\Lambda^*(\mathbb{C}^n)\simeq\Lambda^{ev}(\mathbb{C}^n)\oplus\Lambda^{odd}(\mathbb{C}^n)$ при помощи функций перехода)
- линейное расслоение ξ (при помощи $\det:\mathbf{Spin}^c(2n)\longrightarrow\mathbb{S}^1$)
- *оператор Дирака* $\mathbf{D}: C^\infty(M,\mathcal{S}^+M)\longrightarrow C^\infty(M,\mathcal{S}^-M)$

Индекс оператора Дирака

Формула Атьи–Зингера $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{gathered}\operatorname{ind}\mathbf{D}\otimes 1_E = \left\langle e^{c_1(\xi)/2}A(TM)\,\mathrm{ch}(E), [M]\right\rangle \\ A(TM) = \prod_k \frac{\frac{x_k}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x_k}{2}} \\ \text{— } A\text{-класс вещественного расслоения.}\end{gathered}}$$

Замечания

1. Частный случай — теорема Римана–Роха–Хирцебруха
2. Теорема (Атья–Ботт–Шапиро) Для расслоения есть изоморфизм Тома $\Leftrightarrow$ существует $\mathbf{Spin}^c$-структура $\Leftrightarrow$ w_2 — приведение некоторого целочисленного класса по модулю 2.
3. Имеется вещественный аналог оператора Дирака:

   - *вещественная спинорная группа*

     $$\boxed{\mathbf{Spin}(2n) = \mathbf{Spin}^c(2n) \cap \{\det x = 1\}}$$

     — универсальное накрытие $\mathbf{SO}(2n)$.
   - в формуле индекса $\xi = 1$
   - вещественный оператор Дирака дает изоморфизм Тома в K-теории вещественных расслоений.

Применения оператора Дирака

1. Дифференциальная топология

Теорема (Рохлин)

$\boxed{w_2(M^4) = 0 \text{ и } M^4 \text{ — гладкое ориентированное многообразие}} \Rightarrow \boxed{\text{сигнатура делится на 16}}$

M^4 — односвязно с сигнатурой 8 $\Rightarrow$ оно несглаживаемо

Доказательство.

Из условия $\Rightarrow$ существует вещественный оператор Дирака.

В размерности 4 этот оператор кватернионно-линейный $\operatorname{ind}\mathbf{D} = 2k$. Но в размерности 4:

$$\operatorname{sign} M = p_1[M]/3, \qquad \operatorname{ind}\mathbf{D} = p_1[M]/24.$$

Отсюда получаем искомое: $\operatorname{sign} M = 8 \operatorname{ind}\mathbf{D} = 16k$. □

Теорема (Ошанин): это верно и в размерностях $8n+4$.

Для доказательства используются эллиптические функции (теория эллиптических родов Виттен, Ландвебер,...)

2. Риманова геометрия

Проблема ($R > 0$): Существует ли на заданном многообразии M метрика всюду положительной скалярной кривизны?

Теорема (Громов–Лаусон) Если M односвязно и спинорно:

$$\boxed{R > 0} \Leftrightarrow \boxed{\operatorname{ind}\mathbf{D} = 0}$$

(условие топологическое в силу формулы индекса)

Необходимость.

Формула Лихнеровича:

$$\mathbf{D}^2 = \Delta + \frac{R}{4}$$

Поэтому $\boxed{R > 0} \Rightarrow \operatorname{ind}\mathbf{D} = 0$. □

Другой взгляд на оператор Дирака

D — *оператор типа Дирака*, если он эллиптический, самосопряженный и

$$\sigma(D)^2(\xi) = |\xi|^2$$

В базисе $\sigma(D) = c_k \xi^k \Rightarrow$

$$\boxed{c_k c_j + c_j c_k = 2\delta_{kj}}$$

т.е. матрицы c_k определяют представление алгебры Клиффорда

$$Cl(\mathbb{R}^n) = T(\mathbb{R}^n)/\{vw + wv = 2 < v, w >\}$$

Оператор Дирака отвечает неприводимому представлению (вещественному или комплексному).

Прямой образ в когомологиях (отображение Гизина)

$f : X \longrightarrow Y$ — отображение гладких замкнутых многообразий

$$\begin{tikzcd} H_c^*(TX) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "P.D."'] & H_c^*(TY) \\ H_*(X) \arrow[r, "f_*"] & H_*(Y) \arrow[u, "P.D."'] \end{tikzcd}$$

Дифференциальная теорема Римана–Роха

Коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd} K_c^*(TX) \arrow[r, "f_!"] \arrow[d, "\mathrm{Td}(TX\otimes\mathbb{C})\,\mathrm{ch}"'] & K_c^*(TY) \arrow[d, "\mathrm{Td}(TY\otimes\mathbb{C})\,\mathrm{ch}"] \\ H_c^*(TX,\mathbb{Q}) \arrow[r, "f_*"] & H_c^*(TY,\mathbb{Q}) \end{tikzcd}$$

Применение к индексу:

$$\begin{tikzcd} K_c^*(TM) \arrow[r, "p_!"] \arrow[d, "\mathrm{Td}(TM\otimes\mathbb{C})\,\mathrm{ch}"'] & \mathbb{Z} \arrow[d] \\ H_c^*(TM,\mathbb{Q}) \arrow[r, "p_*"] & \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

$p_* : H_c^{2n}(T^*M,\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$ — интеграл по фундаментальному циклу $\Rightarrow$

Когомологическая формула индекса:

$$\operatorname{ind} D = p_![\sigma(D)] = \langle \mathrm{ch}[\sigma(D)]\, \mathrm{Td}(TM\otimes\mathbb{C}), [T^*M]\rangle$$

Замечание. Есть масса обобщений теоремы Римана–Роха. Например:

$\boxed{f : X \to Y \text{ — отображение почти-комплексных многообразий}} \Rightarrow \boxed{\text{существует прямой образ } f_! : K^*(X) \to K^*(Y)}$

Формула Римана–Роха: $\boxed{\mathrm{ch}\, f_!(x) = f_*(\mathrm{ch}\, x\, \mathrm{Td}(TX - f^*(TY)))}$

Можно требовать только комплексной структуры в $TX - f^*(TY)$.

Доказательство теоремы Римана–Роха

A. Случай вложения $X \overset{i}{\subset} E$ нулевого сечения $\Rightarrow$

$\boxed{\text{прямой образ = изоморфизм Тома}}$

$$\begin{tikzcd}
K^*(X) \arrow[r, "i_!"] \arrow[d, "\mathrm{ch}"'] & K_c^*(E) \arrow[d, "\mathrm{ch}"] \\
H^*(X,\mathbb{Q}) \arrow[r, "i_*"] & H_c^*(E,\mathbb{Q})
\end{tikzcd}$$

$i_!, i_*$ — изоморфизмы модулей

Для элемента $x \in K(X)$ диаграмма дает:

лев.нижн.угол: $\mathrm{ch}\, x i_*(1)$;   прав.верхн.угол: $\mathrm{ch}\, x\, \mathrm{ch}\, i_!(1)$

$$\Downarrow$$

$\boxed{T(E) i_* \mathrm{ch} = \mathrm{ch}\, i_!}$ где $T(E) = i_*^{-1}\,\mathrm{ch}\, i_!(1)$.

$\boxed{T(E) \text{ — характ. класс, } T(E\oplus F) = T(E)T(F)} \Rightarrow T(E) = \prod_k f(x_k)$

<u>Вычислим $f(x)$ на $\mathbb{CP}^n$:</u>

$\boxed{\gamma \text{ — расслоение Хопфа}} \Rightarrow \boxed{\gamma^+ = \mathbb{CP}^{n+1} \text{ — компактификация}}$

$H^*(\mathbb{CP}^{n+1}) = \mathbb{Z}[g]/\{g^{n+2}=0\}$, $c(\gamma) = 1+g$

$$\begin{tikzcd}
K(\mathbb{CP}^n) \arrow[r, "(1-\gamma)\times"] \arrow[d, "\mathrm{ch}"'] & K(\mathbb{CP}^{n+1}) \arrow[d, "\mathrm{ch}"] \\
H^*(\mathbb{CP}^n) \arrow[r, "g"] & H^*(\mathbb{CP}^{n+1})
\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow T(\gamma) = (i_*)^{-1}\,\mathrm{ch}(1-\gamma) = \frac{1-e^g}{g} \Rightarrow \boxed{T(E) = \prod_k \frac{1-e^{x_k}}{x_k}}$$

Для комплексификации получаем (класс Тодда)$^{-1}$:

$$\boxed{T(E\otimes\mathbb{C}) = (\mathrm{Td}(E\otimes\mathbb{C}))^{-1}}$$

так как

$$\frac{1-e^x}{x}\cdot\frac{1-e^{-x}}{-x} = \frac{1-e^{-x}}{x}\cdot\frac{1-e^x}{-x}$$

B. Произвольное отображение $f : X \longrightarrow Y$.

Разложим в композицию:

$X \subset N = U \subset Y \times \mathbb{R}^k \to Y$:

$$\begin{tikzcd}
K(TX) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{ch}"'] & K(TN) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{ch}"'] & K(T(Y \times \mathbb{R}^k)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{ch}"'] & K(TY) \arrow[d, "\mathrm{ch}"'] \\
H(TX) \arrow[r] & H(TN) \arrow[r] & H(T(Y \times \mathbb{R}^k)) \arrow[r] & H(TY)
\end{tikzcd}$$

Всюду коммутативность кроме левого квадрата.

Невязка $\mathrm{Td}(TN \otimes \mathbb{C}) = TX - f^*(TY)$

$\square$