ЛЕКЦИЯ 10. ПРЕПЯТСТВИЯ.

Пусть $\mu : E \to B$ — локально тривиальное расслоение со слоем F, и $f : X \to B$ — непрерывное отображение. В этом случае над X возникает *индуцированное* расслоение $f^*\mu$ со слоем F, тотальное пространство которого есть $E' = \{(x, e) \in X \times E \mid f(x) = \mu(e)\}$, а отображение $\mu' : E' \to X$ — проекция на первый сомножитель. Расслоение называется простым, если для всякого отображения $f : S^1 \to B$ расслоение $f^*\mu$ над S^1 тривиально.

Пример 1. Касательное расслоение к многообразию просто тогда и только тогда, когда многообразие ориентируемо.

Если расслоение просто, его база и слой линейно связны, а слой гомотопически прост, то существует канонический изоморфизм между группами $\pi_n(\mu^{-1}(b))$ слоев над разными точками b. Чтобы построить его, соединим точки b_1 и b_2 путем $\gamma : [0,1] \to B$. Индуцированное расслоение $\gamma^*\mu$ тривиально, как и всякое расслоение над отрезком; поэтому можно отождествить $\pi_n(\mu^{-1}(b_1))$ и $\pi_n(\mu^{-1}(b_2))$, причем в силу гомотопической простоты слоя это отождествление каноническое. В силу простоты расслоения это отождествление не зависит от пути γ.

Пусть теперь база B — клеточное пространство, и задано сечение s расслоения μ над $\mathrm{sk}_{n-1}(B)$. Пусть $f : D^n \to B$ — характеристическое отображение n-мерной клетки e базы. Индуцированное расслоение $f^*\mu$ тривиально, как всякое расслоение над диском (лемма Фельдбау). Сечение s задает сечение f^*s этого расслоения, определенное над $\partial D^n = S^{n-1}$. В силу тривиальности расслоения это сечение можно рассматривать как отображение $S^{n-1} \to F$; обозначим его гомотопический класс $c_s(e) \in \pi_{n-1}(F)$ (здесь мы пользуемся отождествлением гомотопических групп всех слоев). Полученное отображение c является клеточной n-коцепью пространства B с коэффициентами в группе $\pi_{n-1}(F)$. Если $c_s = 0$, то сечение можно продолжить на n-мерный остов; коцепь c_s называется препятствующей.

Теорема 1. *Препятствующая коцепь является коциклом:* $\delta c_s = 0$.

Доказательство. Пусть $\sigma \in \mathcal{K}_n(B) = H_n(\mathrm{sk}_n(B), \mathrm{sk}_{n-1}(B))$ — n-мерная клетка базы B, а $f_\sigma : D^n \to \mathrm{sk}_n(B)$ — ее характеристическое отображение. Поскольку значение препятствующей коцепи c_s определяется значениями f_σ на границе диска D^n, существует такой гомоморфизм $\varrho_s : \mathrm{Im}\,\partial \to \pi_{n-1}(F)$, что $c_s = \varrho_s \circ \partial_*$; здесь $\partial_* : H_n(\mathrm{sk}_n(B), \mathrm{sk}_{n-1}(B)) \to H_{n-1}(\mathrm{sk}_{n-1}(B))$ — связывающий гомоморфизм из точной гомологической последовательности пары $(\mathrm{sk}_n(B), \mathrm{sk}_{n-1}(B))$.

Клеточный дифференциал $\partial : H_{n+1}(\mathrm{sk}_{n+1}(B), \mathrm{sk}_n(B)) = \mathcal{K}_n(B) \to \mathcal{K}_{n-1}(B) = H_n(\mathrm{sk}_n(B), \mathrm{sk}_{n-1}(B))$ представляет собой композицию $p \circ \partial_*$, где $\partial_* : H_{n+1}(\mathrm{sk}_{n+1}(B), \mathrm{sk}_n(B)) \to H_n(\mathrm{sk}_n(B))$ — связывающий гомоморфизм из точной последовательности пары $(\mathrm{sk}_{n+1}(B), \mathrm{sk}_n(B))$, а $p : H_n(\mathrm{sk}_n(B)) \to H_n(\mathrm{sk}_n(B), \mathrm{sk}_{n-1}(B))$ — естественная проекция. Тогда $\delta c_s = c_s \circ \partial = \varrho_s \circ \partial_* \circ p \circ \partial_*$. Но $\partial_* \circ p$, поскольку гомологическая последовательность пары $(\mathrm{sk}_n(B), \mathrm{sk}_{n-1}(B))$ точна. □

Пусть s' — другое сечение μ над $\mathrm{sk}_{n-1}(B)$, причем $s = s'$ на $\mathrm{sk}_{n-2}(B)$. Определим коцепь $u_{ss'} \in \mathcal{C}^{n-1}(B, \pi_{n-1}(F))$ следующим образом. Пусть $f : D^{n-1} \to B$ — характеристическое отображение клетки r. Рассмотрим отображение $\lambda_{ss'} : S^{n-1} \to F$, которое на верхней полусфере равно f^*s, а на нижней — f^*s' (на экваторе отображения согласованы, поскольку $s = s'$ на $(n-2)$-м остове). Тогда $u_{ss'}(r)$ — гомотопический класс сфероида $\lambda_{ss'}$. Коцепь $u_{ss'} \in \mathcal{C}^{n-1}(B, \pi_{n-1}(F))$ называется различающей.

Теорема 1 (продолжение). $c_s - c_{s'} = \delta u_{ss'}$.

Доказательство очевидно. Таким образом, класс когомологий, задаваемый коциклом c_s (он называется препятствием) зависит только от ограничения сечения s на $(n-2)$-ой остов базы.

Нетрудно видеть, что для всякого сечения s над $\mathrm{sk}_{n-1}(B)$ и всякой коцепи $u \in \mathcal{C}^{n-1}(B, \pi_{n-1}(F))$ существует сечение s' над $\mathrm{sk}_{n-1}(B)$, совпадающее с s над $\mathrm{sk}_{n-2}(B)$, и такое, что $u = u_{ss'}$. Таким образом, если препятствие для сечения s равно нулю (препятствующий коцикл c_s является кограницей), то его можно изменить на $\mathrm{sk}_{n-1}(B)$, не меняя над $\mathrm{sk}_{n-2}(B)$, и так, чтобы препятствующая коцепь стала нулевой — после чего сечение можно продолжить на $\mathrm{sk}_n(B)$. Следующее препятствие теперь возникнет в $H^{n+1}(B, \pi_n(F))$, и т.д. Отсюда следует, например, такое утверждение:

Предложение 1. *Если слой расслоения $p : E \to B$ стягиваем, а его база B — клеточное пространство, то расслоение имеет сечение.*

Доказательство. Поскольку пространство B клеточно, достаточно доказать, что сечение существует над любым остовом. Таким образом, достаточно доказать теорему в случае, когда B конечномерно. Но к построению такого сечения нет препятствий: все группы $\pi_n(F)$ тривиальны, поэтому тривиальны и все препятствующие коцепи. □

Следствие 1. *Во всяком векторном расслоении $E \to B$ с клеточной базой можно наделить слой над каждой точкой $b \in B$ скалярным произведением, так чтобы оно непрерывно зависело от точки b.*

Доказательство. Множество скалярных произведений (т.е. положительно определенных билинейных форм) в данном линейном пространстве выпукло (докажите !) и потому стягиваемо. Все такие формы в слоях векторного расслоения $E \to B$ образуют, таким образом, расслоение над B со стягиваемым слоем. □

Следствие 2. *Любые два сечения расслоения со стягиваемым слоем гомотопны.*

Доказательство. Опять-таки, достаточно доказать теорему в случае, когда B конечномерно, скажем, $\dim B = n$. Пусть s_0, s_1 — два сечения исходного расслоения. Рассмотрим расслоение $r^*p : E' \to B \times [0,1]$, где $r : B \times [0,1] \to B$ — проекция. Зададим сечение s расслоения r^*p, равное s_0 над $B \times \{0\}$ и s_1 над $B \times \{1\}$, а над остальными точками $\mathrm{sk}_n(B \times [0,1])$ — как угодно. К продолжению сечения на $B \times [0,1] = \mathrm{sk}_{n+1}(B \times [0,1])$ нет препятствий, поэтому расслоение r^*p имеет сечение, совпадаюшее на $\mathrm{sk}_n(B \times [0,1])$ с уже построенным. Но это сечение и есть гомотопия, соединяющая s_0 и s_1. □

Пусть $p : E \to B$ — k-мерное векторное расслоение. Наделим его послойным скалярным произведением и сопоставим ему расслоение $P : S(E) \to B$, слоями которого являются $(k-1)$-мерные единичные сферы в слоях расслоения E. Поскольку $\pi_i(S^{k-1}) = 0$ при $i < k-1$, можно построить сечение s такого сферизованного расслоения над $\mathrm{sk}_{k-1}(B)$; к продолжению сечения на $\mathrm{sk}_k(B)$ возникает препятствие, лежащее в $H^k(B, \pi_{k-1}(S^{k-1})) = H^k(B)$.

Предложение 2. *Это препятствие не зависит от выбора сечения s.*

Доказательство. Аналогично следствию 2 показывается, что любые два сечения над $\mathrm{sk}_{n-2}(B)$ гомотопны. Препятствие зависит только от ограничения сечения на $\mathrm{sk}_{n-2}(B)$. Но при гомотопии значение препятствующей коцепи на произвольной клеточной цепи меняется непрерывно, и поэтому не меняется вовсе (значение целое). Таким образом, препятствие не меняется. □

Построенное препятствие зависит, тем самым, только от самого расслоения и называется классом Эйлера $e(p) \in H^k(B)$.