ЛЕКЦИЯ 11. ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ.

Пусть $p : E \to B$ — непрерывное отображение, F — топологическое пространство, G — группа, действующая на F непрерывными преобразованиями. (E, B, F, p, G) называется расслоением с базой B, тотальным пространством E, слоем F, отображением p и структурной группой G, если для всякого $b \in B$ существует окрестность U и гомеоморфизм $\varphi_U : p^{-1}(U) \to U \times F$ такое, что 1) $p|_{p^{-1}(U)} = \pi_U \circ \varphi_U$, где $\pi_U : U \times F \to U$ — проекция, и 2) если $U \cap V \neq \varnothing$, то существует такое отображение $\varphi_{UV} : U \cap V \to G$, что $\varphi_V(a) = (\mathrm{id} \times \varphi_{UV}) \circ \varphi_U(a)$ для всякого $a \in U \cap V$. Отображения φ_U называются тривиализациями, а φ_{UV} — функциями перехода.

Если пространство F наделено какой-нибудь структурой, и действие группы G эту структуру сохраняет, то соответствующую структуру можно корректно определить на слоях расслоения.

Пример 1. Обычное (топологическое) расслоение соответствует случаю, когда G — группа гомеоморфизмов $F \to F$.

Пример 2. $F = \mathbb{R}^n$, $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ со стандартным действием — векторное расслоение; $G = \mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R})$ — ориентированное векторное расслоение; $G = \mathrm{SO}(n)$ — ориентированное векторное расслоение со скалярным произведением в слоях; G — группа верхнетреугольных матриц — векторное расслоение, в каждом слое которого выделен флаг.

Нетрудно видеть, что $\varphi_{UW} = \varphi_{VW}\varphi_{UV}$ на тройных пересечениях $U \cap V \cap W$; с другой стороны, если задано покрытие B открытыми множествами U, действие группы G на пространстве F и система отображений $\varphi_{UV} : U \cap V \to G$, удовлетворяющая этому равенству, то существует расслоение со слоем F, для которого φ_{UV} являются функциями перехода. Тотальное пространство E этого расслоения является объединением всех множеств $U \times F$, профакторизованным по отождествлению $U \times F \ni (x, f) \sim (x, \varphi_{UV}(x)f) \in V \times F$ для всех точек $x \in U \cap V$. Нетрудно видеть, что функции перехода определяют расслоение однозначно с точностью до эквивалентности.

Если для двух расслоений $p : E \to B$ и $p' : E' \to B$ со слоями F и F' существует покрытие базы открытыми множествами, для которого функции перехода одинаковы (но при этом элементы группы G действуют на разных пространствах — F и F' !), то расслоения называются ассоциированными.

Пример 3. Группа $\mathrm{O}(n)$ действует на единичной сфере в $\mathbb{R}^n$. Расслоение, ассоциированное с векторным $\mathrm{O}(n)$-расслоением $E \to B$, слой которого — единичная сфера, это сферизация расслоения E. Можно также определить, например, расслоение, ассоциированное с векторным расслоением E, слой которого — пространство всех реперов (базисов) в слоях расслоения E.

Для векторного расслоения $E \to B$ можно определить сопряженное расслоение $E^* \to B$, слоем которого будет сопряженное векторное пространство $(\mathbb{R}^n)^*$, а отображения перехода связаны с отображениями φ_{UV} расслоения E равенствами $\tilde{\varphi}_{UV} = (\varphi_{UV}^*)^{-1}$. Сечения расслоения E^* можно отождествить с функциями $E \to \mathbb{R}$, линейными на каждом слое.

Пусть $p : E \to B$ — гладкое векторное расслоение. Это означает, что E и B являются многообразиями, p — гладким отображением, и структура векторного пространства в слое над точкой b зависит от b гладко. Заметим, что у векторного расслоения всегда есть выделенное сечение — нулевое.

Теорема 1. *Пусть база B — замкнутое ориентированное многообразие, и пусть $s : B \to E$ — сечение гладкого векторного расслоения $p : E \to B$, график которого пересекает график нулевого сечения трансверсально. Пусть $N_s = \{b \in B \mid s(b) = 0\}$ — проекция множества точек их пересечения на базу. Тогда N_s — замкнутое ориентированное многообразие размерности $n - k$, и его фундаментальный класс $[N_s] \in H_{n-k}(B)$ двойственен по Пуанкаре классу Эйлера $e(p) \in H^k(B)$.*

Доказательство. Тот факт, что N_s — замкнутое многообразие, вытекает из теоремы о неявной функции; эта же теорема определяет ориентацию. Выберем на многообразии B триангуляцию $\mathcal{T}$, барицентрические звезды которой образуют клеточное разбиение N_s. Если k-мерный симплекс σ триангуляции $\mathcal{T}$ не пересекается с N_s, то, очевидно, расслоение $S(E)$ имеет над ним сечение, так что $e(\sigma) = 0$. Если σ пересекает N_s, то точка пересечения ровно одна — центр тяжести симплекса σ. Сечение s представляет собой векторное поле на симплексе σ с единственным нулем, причем в силу трансверсальности этот нуль невырожден: $\det\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j}(0)\right) \neq 0$, где $x_1, \dots, x_k$ — произвольная система координат на σ. В силу формулы Тейлора такое векторное поле гомотопно линейному полю $s_0(x) = (\sum_{i=1}^k \frac{\partial s_i}{\partial x_j}(0)x_1, \dots, \sum_{i=1}^k \frac{\partial s_i}{\partial x_j}(0)x_k)$. Индекс особой точки

0 такого поля равен $\operatorname{sign}\det\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j}(0)\right) = \pm 1$ — следовательно, таков же и индекс особой точки исходного поля s. Поскольку нуль единственный, вращение этого поля на границе симплекса σ равно тому же самому числу. С другой стороны, это вращение равно, по определению, $e(\sigma)$. Поэтому $[N_s]_{\beta\mathcal{T}} = [B]_{\mathcal{T}} \cap c_s$, где $\beta\mathcal{T}$ — барицентрическое подразделение триангуляции $\mathcal{T}$. Переходя к гомологиям, получаем $[N_s] = [B] \cap e$. □

Следствие. *Если B — n-мерное ориентированное многообразие, то $e(TB) = \chi(B) \in H^n(B) = \mathbb{Z}$.*

Пример 4. Примером векторного расслоения является тавтологическое расслоение на грассманиане. Пусть $G(n,k)$ — множество k-мерных линейных подпространств в $\mathbb{R}^n$. Слоем расслоения $\tau_{n,k} : E \to G(n,k)$ над точкой $b \in G(n,k)$ является само подпространство $b \subset \mathbb{R}^n$.

Вычислим класс $e(\tau_{n,k})$. Для этого зафиксируем в пространстве $\mathbb{R}^n$ гиперплоскость $\Pi = \mathbb{R}^{n-1}$, и рассмотрим единичную сферу $S \subset \mathbb{R}^n$, касающуюся гиперплоскости Π. Если $b \subset \Pi$, то пересечение $b \cap S$ — начало координат, а если $b \not\subset \Pi$, то пересечение — сфера $S' \subset b$ размерности $k-1$, проходящая через начало координат. Пусть $s(b) \in b$ — самая удаленная от начала координат точка этой сферы, и по определению $s(b) = 0$, если $b \subset \Pi$. Таким образом, построено сечение s расслоения $\tau_{n,k}$, множеством нулей которого является грассманиан $G(\Pi, k) = G(n-1,k)$; класс Эйлера двойствен по Пуанкаре классу $[G(n-1,k)]$.

Предложение 1. *Пусть B, B' — компактные топологические пространства, $f_0, f_1 : B' \to B$ — гомотопные непрерывные отображения, а $p : E \to B$ — расслоение (векторное или топологическое). Тогда расслоения $f_0^* p$ и $f_1^* p$ эквивалентны.*

Доказательство. Пусть p_1, p_2 — векторные расслоения с одной и той же базой X. Обозначим $\mathrm{Hom}(p_1, p_2)$ векторное расслоение, слой которого над точкой $x \in X$ состоит из всех линейных отображений из пространства $p_1^{-1}(x)$ в пространство $p_2^{-1}(x)$. Если размерности слоев одинаковы, то пусть $\mathrm{Iso}(p_1, p_2)$ — подрасслоение (уже не векторное) расслоения $\mathrm{Hom}(p_1, p_2)$, слой которого состоит из линейных изоморфизмов $p_1^{-1}(x) \to p_2^{-1}(x)$.

Нам нужно доказать, что расслоение $\mathrm{Iso}(f_0^* p, f_1^* p)$ (с базой B') имеет сечение. Пусть $f : B' \times [0,1] \to B$ — гомотопия между f_0 и f_1. Зафиксируем $t \in [0,1]$; пусть $\varphi_t : B' \times [0,1] B$ — композиция естественной проекции $B' \times [0,1] \to B'$ и отображения $f_t : B' \to B$. Расслоение $\mathrm{Hom}(f^* p, \varphi_t^* p)$ — векторное, и поэтому имеет сечение, причем можно предположить, что на множестве $B' \times \{t\} \subset B' \times [0,1]$ это сечение — тождественное отображение. Поскольку пространство B' компактно, а множество изоморфизмов между линейными пространствами открыто, найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\forall t',\ |t' - t| < \varepsilon$ сечение s на множестве $B' \times \{t'\} \subset B' \times [0,1]$ — изоморфизм. Отсюда следует, что расслоения $f_t^* p$ и $f_{t'}^* p$ изоморфны. Компактность отрезка завершает доказательство. □

Существует естественное вложение грассманианов $\iota_{n,k} : G(n,k) \to G(n+1,k)$, порожденное вложением гиперплоскости в пространство. Нетрудно видеть, что $\iota_{n,k}^* \tau_{n+1,k} = \tau_{n,k}$, и поэтому $\iota_{n,k}^* e(\tau_{n+1,k}) = e(\tau_{n,k})$. Пусть теперь $G(\infty, k)$ — клеточное пространство, полученное бесконечным объединением $G(k,k) \subset G(k+1,k) \subset \dots \subset G(n,k) \subset \dots$, где вложение осуществляется отображениями $\iota_{n,k}$. На $G(\infty,k)$ определено тавтологическое расслоение $\tau_{\infty,k}$, ограничение которого на $G(n,k)$ есть $\tau_{n,k}$. Также на $G(\infty,k)$ существует корректно определенный класс когомологий e, ограничение которого на $G(n,k)$ есть $e(\tau_{n,k})$. Практически очевидно, что $e = e(\tau_{\infty,k})$, но для доказательства этого нужно на $G(\infty,k)$ ввести клеточную структуру.