ЛЕКЦИЯ 12. ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ПРЕПЯТСТВИЙ.

Предложение 1. *Пусть $f : B' \to B$ — непрерывное отображение клеточных пространств, а $p : E \to B$ — векторное расслоение. Тогда $e(f^*p) = f^*e(p)$.*

(слева f^* — индуцированное расслоение, а справа — гомоморфизм в когомологиях).

Доказательство. По теореме о клеточной аппроксимации отображение f гомотопно клеточному. Поскольку класс Эйлера эквивалентных расслоений одинаков, предложение 1 лекции 11 позволяет считать, что f — клеточное отображение. Но тогда для всякого сечения s сферизованного расслоения $P : S(E) \to B$ (определенного на подходящем остове базы) получим $c_{f^*s} = f^*c_s$, где f^*s — сечение индуцированного сферизованного расслоения f^*P над B'. Поскольку класс Эйлера не зависит от выбора сечения, получаем требуемое. □

Пусть теперь $f : B \to G(\infty, k)$ — непрерывное отображение, а $f^*\tau_{\infty,k}$ — индуцированное k-мерное расслоение на B.

Теорема 1. *Если B — компактное клеточное пространство, то для всякого k-мерного векторного расслоения $p : E \to B$ существует отображение $f : B \to G(\infty, k)$ такое, что расслоение $f^*\tau_{\infty,k}$ эквивалентно p. Отображение f определено однозначно с точностью до гомотопии. Иными словами, множество классов эквивалентности k-мерных векторных расслоений с базой B находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $\pi(B, G(\infty, k))$ классов гомотопии отображений из B в $G(\infty, k)$.*

Лемма. *Пусть X — компактное клеточное пространство, а $Y \subset X$ — клеточное подпространство, $p : E \to X$ — k-мерное векторное расслоение. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ — сечения расслоения $p|_Y$, равные нулю при $n > N$ (для некоторого N) и такие, что их значения в произвольной точек $b \in Y$ порождают слой этого расслоения. Тогда $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ можно продолжить до сечений расслоения p с теми же свойствами.*

Заметим, что а) отнюдь не предполагается, что ненулевые функционалы $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ образуют базис в слое — возможны линейные зависимости и б) в принципе, число N может при продолжении измениться.

Доказательство леммы. Для всякой точки $a \in X$ существует система сечений расслоения p, значения которых в точек a порождают слой $p^{-1}(a)$. По непрерывности, это верно также для всех точек b из некоторой окрестности $U \subset X$ точки a. В силу компактности X можно покрыть конечным количеством таких окрестностей $U_1, \dots, U_k$.

Пусть теперь $f : X \to \mathbb{R}$ — функция, равная 0 на Y и положительная на $X \setminus Y$. Рассмотрим все сечения, построенные для окрестностей $U_1, \dots, U_k$, и умножим их на f. К ним добавим все ненулевые сечения $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$, которые продолжим на все X — продолжение сечений векторного расслоения на всю базу не встречает препятствий. Объединим все полученные сечения и дополним нулями до бесконечной системы. □

Следствие. *Пусть X — компактное клеточное пространство, а $Y \subset X$ — клеточное подпространство, $p : E \to X$ — k-мерное векторное расслоение, а $h : Y \to G(\infty, k)$ — отображение, для которого $h^*\tau_{\infty,k} \sim p|_Y$. Тогда существует отображение $f : X \to G(\infty, k)$ такое, что $f|_Y = h$ и $f^*\tau_{\infty,k} \sim p$.*

Доказательство. Пусть $x_1, \dots, x_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — координаты на $\mathbb{R}^n$; тогда отображения $\varphi_i = x_i \circ h$ при достаточно большом n представляют собой сечения расслоения $p^*|_Y$, порождающие его слой в каждой точке. Согласно лемме, их можно продолжить на все X с сохранением этого свойства. Теперь f можно определить так: $f(b) \subset \mathbb{R}^n$ — подпространство, порожденное всеми наборами $(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$, где x пробегает весь слой расслоения p над точкой b. □

Доказательство теоремы 1. Существование отображения f вытекает из предыдущего следствия, примененного к $X = B$ и $Y = \varnothing$. Утверждение о том, что из эквивалентность расслоений f_0^*p и f_1^*p влечет гомотопность отображений f_0 и f_1, вытекает из того же следствия, примененного к $X = B \times [0, 1]$ и $Y = B \times \{0, 1\}$. □

Из предложения 1 и теоремы 1 следует, что класс Эйлера произвольного расслоения является обратным образом класса когомологий грассманиана $G(n, k)$, двойственного по Пуанкаре к множеству подпространств k, лежащих в фиксированной гиперплоскости; в силу сказанного выше этот класс в естественном смысле не зависит от n.

Реализуем окружность S^1 как абелеву группу $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Это порождает естественную структуру абелевой группы в множестве $\pi(X, S^1)$ классов гомотопии отображений $X \to S^1$, где X — произвольное топологическое пространство.

Теорема 2 (Брушлинский). *Если X — клеточное пространство, то группа $\pi(X, S^1)$ с указанным умножением изоморфна $H^1(X)$.*

Доказательство. Пусть $m \in H^1(S^1) = \mathbb{Z}$ — образующая. Сопоставим всякому отображению $f : X \to S^1$ элемент $f^* m \in H^1(X)$; этот элемент зависит только от класса гомотопии отображения f.

Покажем, что построенное отображение $\pi(X, S^1) \to H^1(X)$ — сюръекция. Пусть $a \in \mathcal{Z}^1(X)$ — коцикл, представляющий класс $[a] \in H^1(X)$. Определим отображение $f : \mathrm{sk}_0(X) \to S^1$ как отображение в точку $1 \in S^1$. На произвольной 1-мерной клетке e определим f так, чтобы ограничение f на замыкание $\overline{e}$ представляло собой петлю в S^1, класс гомотопии которой равен $a(e) \in \mathbb{Z}$. Поскольку a — коцикл, к продолжению f на $\mathrm{sk}_2(X)$ препятствий не возникает. Для остальных остовов их также не возникает, поскольку $\pi_k(S^1) = 0$ при $k > 1$. Тем самым f продолжается на все X; очевидно, $f^* m = [a]$.

Покажем теперь, что построенное отображение $\pi(X, S^1) \to H^1(X)$ — инъекция. Пусть $f_0^* m = f_1^* m$. На $\mathrm{sk}_0(X)$ отображения f_0 и f_1 гомотопны, поскольку S^1 линейно связна. Препятствие к продолжению гомотопии на $\mathrm{sk}_1(X)$ равно нулю, поскольку $f_0^* m = f_1^* m$ — следовательно, гомотопию можно продолжить на $\mathrm{sk}_1(X)$ (быть может, предварительно изменив ее на $\mathrm{sk}_0(X)$). К дальнейшему продолжению гомотопии препятствий не возникает опять-таки в силу равенств $\pi_k(S^1) = 0$ при $k > 1$.

Нетрудно убедиться, что построенное отображение — гомоморфизм групп. $\square$

Теорема 3 (Хопф). *Если X — n-мерное клеточное пространство, то существует взаимно однозначное соответствие между $H^n(X)$ и множеством $\pi(X, S^n)$ классов гомотопии отображений $X \to S^n$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2: препятствий к продолжению отображения (или гомотопии) на остовы $\mathrm{sk}_i(X)$ при $i \leq n-1$ не возникает, поскольку $\pi_i(S^n) = 0$, следующее препятствие равно нулю в силу конструкции, а дальнейших препятствий вообще нет, поскольку размерность пространства X равна n.