ЛЕКЦИЯ 2. ГОМОЛОГИИ СФЕРЫ.

Пусть X — произвольное топологическое пространство, и $Y \subset X$. В этом случае можно считать, что $\mathcal{C}_q(Y) \subset \mathcal{C}_q(X)$ и порождено теми сингулярными симплексами $f : T_q \to X$, образы которых лежат в Y. Поскольку дифференциал ∂_q переводит $\mathcal{C}_q(Y) \subset \mathcal{C}_q(X)$ в $\mathcal{C}_{q-1}(Y) \subset \mathcal{C}_{q-1}(X)$, то можно определить фактор-комплекс, пространствами которого будут $\mathcal{C}_q(X)/\mathcal{C}_q(Y)$. Гомологии факторкомплекса называются относительными и обозначаются $H_q(X,Y)$. Иными словами, $H_q(X,Y) = \mathcal{Z}_q(X,Y)/\mathcal{B}_q(X,Y)$, где $\mathcal{Z}_q(X,Y) = \{\sigma \in \mathcal{C}_q(X) \mid \partial_q\sigma \subset Y\}$, а $\mathcal{B}_q(X,Y) = \{\sigma \in \mathcal{C}_q(X) \mid \exists \tau \in \mathcal{C}_{q+1}(X), \varrho \in \mathcal{C}_q(Y)\, \sigma = \varrho + \partial_q\tau\}$.

Вложение $\iota_q : \mathcal{C}_q(Y) \to \mathcal{C}_q(X)$ и проекция $\pi_q : \mathcal{C}_q(X) \to \mathcal{C}_q(X)/\mathcal{C}_q(Y)$ порождают соответствующие гомоморфизмы в гомологиях: $H_q(Y) \xrightarrow{\iota_*} H_q(X) \xrightarrow{\pi_*} H_q(X,Y)$. Рассмотрим теперь класс $a \in H_q(X,Y)$, и пусть $\sigma \in \mathcal{Z}_q(X,Y)$ — представляющий его цикл. Иными словами, σ можно считать элементом $\mathcal{C}_q(X)$, для которого $\tau = \partial_q\sigma \in \mathcal{C}_q(Y)$. Поскольку $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$, имеем $\partial_{q-1}\tau = 0$, т.е. $\tau \in \mathcal{Z}_{q-1}(Y)$. Нетрудно проверить, что класс гомологий $b \in H_{q-1}(Y)$, представляемый элементом τ, зависит только от класса a, и притом линейно. Тем самым определен гомоморфизм $\partial_* : H_q(X,Y) \to H_{q-1}(Y)$.

Предложение 1. *Последовательность* $\dots \xrightarrow{\partial_*} H_q(Y) \xrightarrow{\iota_*} H_q(X) \xrightarrow{\pi_*} H_q(X,Y) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(Y) \xrightarrow{\iota_*} \dots$ *является точной*

Доказательство — прямая проверка. Построенная последовательность называется гомологической точной последовательностью пары пространств $Y \subset X$.

На самом деле предложение 1 является частным случаем общей алгебраической ситуации: короткой точной последовательности комплексов $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0$ соответствует длинная точная последовательность их гомологий $\dots \xrightarrow{\partial_*} H_q(U) \xrightarrow{\iota_*} H_q(V) \xrightarrow{\pi_*} H_q(W) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(U) \xrightarrow{\iota_*} \dots$, конструкция которой полностью аналогична приведенной выше. Вот еще один пример такой ситуации: пусть $Z \subset Y \subset X$. Тогда возникает точная последовательность комплексов $0 \to \mathcal{C}(Y)/\mathcal{C}(Z) \to \mathcal{C}(X)/\mathcal{C}(Z) \to \mathcal{C}(X)/\mathcal{C}(Y) \to 0$. Соответствующая точная последовательность гомологий $\dots \xrightarrow{\partial_*} H_q(Y,Z) \xrightarrow{\iota_*} H_q(X,Z) \xrightarrow{\pi_*} H_q(X,Y) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(Y,Z) \xrightarrow{\iota_*} \dots$ называется точной гомологической последовательностью тройки (X,Y,Z).

Предложение 2. *Пусть $Y \subset X$ состоит из одной точки. Тогда $H_q(X,Y) = H_q(X)$ при $q > 0$, и $H_0(X) = H_0(X,Y) \oplus \mathbb{Z}$.*

Для доказательства нам потребуется следующая лемма:

Лемма 1. *Группа $H_0(X)$ произвольного пространства X свободно порождена множеством компонент линейной связности пространства X.*

Доказательство. Группа $\mathcal{C}_0(X) = \mathcal{Z}_0(X)$ состоит из всевозможных выражений вида $x = \sum_i n_i a_i$, где $n_i \in \mathbb{Z}$, $a_i \in X$. Нетрудно видеть, что $x \in \mathcal{B}_0(X)$, если для каждой компоненты линейной связности пространства X сумма коэффициентов при тех точках a_i, которые в ней лежат, равна нулю. $\square$

Доказательство. [предложения 2] Утверждение вытекает из точной последовательности пары и результатов вычисления гомологий точки. При $q \geq 2$

имеем $H_q(Y) = 0 \to H_q(X) \to H_q(X,Y) \to H_{q-1}(Y) = 0$, откуда $H_q(X,Y) = H_q(X)$. Очевидно, что отображение $H_0(Y) \to H_0(X)$ является вложением $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^N$, соответствующим той компоненте связности пространства X, в которой отмечена точка. Отсюда получается результат при $q = 0$. При этом $\operatorname{Ker}(\iota_0)_* : H_0(Y) \to H_0(X) = 0$, откуда следует, что $(\partial_0)_* = 0$, и $H_1(X) = H_1(X,Y)$. □

Гомологии пространства X по модулю точки называют приведенными и обозначают $\tilde{H}_q(X)$.

Пример 1. $\tilde{H}_q(pt) = 0$ для любого q. То же самое верно для произвольного стягиваемого пространства — гомотопическая инвариантность относительных гомологий доказывается так же, как и для абсолютных.

Основным результатом данной лекции является следующая теорема:

Теорема 1. *Для всякого $n \geq 0$ имеет место равенство $\tilde{H}_n(S^n) = \mathbb{Z}$, и $\tilde{H}_i(S^n) = 0$ при $i \neq n$.*

Доказательство теоремы базируется на точной последовательности тройки и следующем геометрическом утверждении:

Предложение 3. *Пусть D^n обозначает n-мерный шар, а $S^{n-1} \subset D^n$ — его граничную сферу. Тогда $H_q(D^n, S^{n-1}) = \tilde{H}_q(S^n)$ для всех n и q.*

Доказательство этого предложения, в свою очередь, опирается на такую лемму:

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{U} = \{U_i\}$ — конечное покрытие пространства X открытыми множествами (так что $X = \bigcup_i U_i$). Обозначим $\mathcal{C}^{\mathcal{U}}_q(X) \subset \mathcal{C}_q(X)$ абелеву группу, порожденную сингулярными симплексами $f : T_q \to X$ такими, что $f(T_q) \subset U_i$ при некотором i. Тогда вложение комплексов $\mathcal{C}^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow \mathcal{C}(X)$ порождает изоморфизм в гомологиях.*

Иными словами, гомологии пространства X можно вычислять с помощью сингулярных цепей, "подчиненных" произвольному конечному открытому покрытию $\mathcal{U}$.

Докажем сначала предложение 3 и теорему 1, а затем уже только — лемму.

Доказательство. [предложения 3] Рассмотрим покрытие $\mathcal{U}$ сферы S^n двумя открытыми множествами U_1, U_2 — сферой без южного полюса и сферой без северного полюса. Каждое из множеств U_1, U_2 стягиваемо, а их пересечение $U_1 \cap U_2$ стягивается на экватор S^{n-1} сферы S^n.

В силу гомотопической инвариантности относительных гомологий (сформулируйте и докажите соответствующий результат !) имеет место равенство $\tilde{H}_q(S^n) = H_q(S^n, U_2)$. Согласно лемме 2 (относительный вариант которой доказывается так же, как и абсолютный), $H_q(S^n, U_2) = H_1(\mathcal{C}^{\mathcal{U}}(S^n, U_2))$. Но $\mathcal{C}^{\mathcal{U}}_q(S^n, U_2) = \mathcal{C}^{\mathcal{U}}_q(U_1 \cup U_2)/\mathcal{C}^{\mathcal{U}}_q(U_2) = \mathcal{C}^{\mathcal{U}}_q(U_1)/\mathcal{C}^{\mathcal{U}}_q(U_1 \cap U_2)$. Тем самым $H_q(S^n, U_2) = H_q(U_1, U_1 \cap U_2) = H_q(D^n, S^{n-1})$ — последнее равенство вытекает опять из гомотопической инвариантности. □

Доказательство. [теоремы 1] Для $n = 0$ (S^0 состоит из двух точек) теорема доказывается непосредственно. Для произвольного n напишем точную гомологическую последовательность тройки (D^n, S^{n-1}, точка): $\tilde{H}_q(D^n) \to H_q(D^n, S^{n-1} \to \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) \to \tilde{H}_{q-1}(D^n)$. Согласно предложениям 3 и 2 этот фрагмент выглядит так: $0 \to \tilde{H}_q(S^n) \to \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) \to 0$, откуда $\tilde{H}_q(S^n) = \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1})$ для всех n и q, и теорема доказана по индукции. □

Для доказательства леммы 2 нам потребуется конструкция *барицентрического подразделения.* Это разбиение стандартного симплекса $T_q = \bigcup_{i=1}^{(q+1)!} \Delta_i$ на подсимплексы, которое определяется по индукции: сначала разбиваются все грани симплекса T_q, после чего в качестве Δ_i берутся пирамиды, основания которых — $(q-1)$-мерные симплексы, на которые разбиты грани, а вершина — центр симплекса T_q. Так, отрезок T_1 при это разбивается на 2 половины, правильный треугольник T_2 — на 6 частей тремя медианами, и т.д. Нетрудно видеть, что у каждого Δ_i одна вершина a_0 совпадает с вершиной исходного симплекса, одна — является серединой отрезка a_0a_1, еще одна — центром тяжести треугольника $a_0a_1a_2$, и т.д., вплоть до последней вершины, которая является центром исходного q-мерного симплекса $a_0a_1 \dots a_q$. Таким образом, симплексы Δ_i однозначно нумеруются перестановками $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_q)$ множества вершин $a_0, \dots, a_q$ исходного симплекса

Барицентрическое подразделение позволяет определить линейный оператор $\beta : \mathcal{C}_q(X) \to \mathcal{C}_q(X)$ следующим образом. Пусть $\Lambda_\sigma : T_q \to \Delta_\sigma$ — аффинное отображение стандартного симплекса на симплекс барицентрического подразделения, соответствующий перестановке σ, при котором вершина a_0 переходит в a_{σ_0}, вершина a_1 — в середину отрезка $a_{\sigma_0}a_{\sigma_1}$, и т.д. Для сингулярного симплекса $f : T_q \to X$ положим $\beta(f) = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\, f|_{\Delta_\sigma} \circ \Lambda_\sigma$ (здесь $\operatorname{sgn}(\sigma) = \pm 1$ в зависимости от четности перестановки σ), а на сингулярные цепи продолжим оператор β по линейности.

Доказательство. [леммы 2] Заметим прежде всего, что для произвольной сингулярной цепи $a \in \mathcal{C}_q(X)$ разность $a - \beta(a)$ является границей. Действительно, построим по индукции следующее разбиение цилиндра $T_q \times [0,1] = \bigcup_i R_i$ на симплексы: нижнее основание $T_q \times \{0\}$ резать не будем, боковые стенки (они все являются цилиндрами $T_{q-1} \times [0,1]$) разобьем по предположению индукции, а затем в качестве R_i возьмем пирамиды, чьи основания — уже построенные q-мерные симплексы, а вершина — центр верхнего основания $T_q \times \{1\}$. Нетрудно видеть, что на верхнем основании возникает при этом барицентрическое подразделение. Если теперь $f : T_q \to X$ — сингулярный симплекс, то обозначим $F : T_q \times [0,1] \to X$ отображение, действующее по правилу $F(x,t) = f(x)$, и пусть $D(f) = \sum_i \pm F|_{R_i}$ (где знаки легко выбираются по индукции — уточните !). Нетрудно видеть, что $f - \beta(f) = \partial D(f)$.

Пусть теперь $a \in \mathcal{Z}_q(X)$ — произвольный цикл. Поскольку множества U_i открыты и их конечное число, для достаточно большого n цепь $\beta^n(a) \in \mathcal{Z}_q^{\mathcal{U}}(X)$. С другой стороны, если $a = \partial b$, где $b \in \mathcal{Z}_{q+1}(X)$, то одновременно и $a = \partial\beta^n(b)$ для всякого n; при достаточно большом n имеем $\beta^n(b) \in \mathcal{Z}_{q+1}^{\mathcal{U}}(X)$. Отсюда следует, что гомологии комплексов $\mathcal{C}(X)$ и $\mathcal{C}^{\mathcal{U}}(X)$ совпадают. $\square$

Предложение 4. *Пусть $V = \bigvee_{i=1}^N S^n$ — букет n-мерных сфер. Тогда $\tilde{H}_n(V) = \mathbb{Z}^N$, и остальные гомологии тривиальны.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что если $A = B \sqcup C$ — несвязное объединение, то $H_q(A) = H_q(B) \oplus H_q(C)$. Пусть $U = \bigsqcup_{i=1}^N S^n$ — несвязное объединение сфер, а $W \subset U$ — множество из N точек, по одной в каждой сфере. Тогда из точной последовательности пары $\dots \to H_q(W) \to H_q(U) \to H_q(U,W) \to H_{q-1}(W) \to \dots$ вытекает, что $H_q(U,W) = \mathbb{Z}^N$ при $q = n$ и равно нулю при прочих q. Равенство $H_q(U,W) = \tilde{H}_q(V)$ выводится из леммы в точности так же, как равенство $H_q(D^n, S^{n-1}) = \tilde{H}_q(S^n)$ в предложении 3. $\square$