ЛЕКЦИЯ 3. КЛЕТОЧНЫЕ ГОМОЛОГИИ.

Предложение 1. *Пусть $f : S^n \to S^n$ — отображение степени d (т.е. представляет собой элемент $d \in \pi_n(S^n)$). Тогда гомоморфизм $f_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ является умножением на d.*

Доказательство. Гомотопные отображения f порождают одинаковые гомоморфизмы f_* в гомологиях, так что достаточно доказать утверждение для какого-нибудь отображения степени d. Возьмем в качестве такого отображения композицию $f = f_2 \circ f_1$. Здесь $f_1 : S^n \to V_d$, где $V_d = \bigvee_{i=1}^d S^n$ — отображение сферы в букет, в котором прообраз вершины букета это $d-1$ сфер размерности $n-1$, пересекающихся в северном полюсе сферы S^n, а все остальные точки имеют ровно 1 прообраз. Отображение $f_2 : V_d \to S^n$ отображает каждую из сфер букета тождественно на S^n.

Пусть $p_i : V_d \to S^n$ — отображение, стягивающее все сферы букета, кроме i-й, в точку, а i-ю сферу отображающее тождественно, Композиция $p_i \circ f_1 : S^n \to S^n$ — тождественное отображение, и поэтому $(p_i \circ f_1)_* = (p_i)_* \circ (f_1)_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n) = \mathrm{id}$. Поскольку $(p_i)_* : H_n(V_d) = \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z} = H_n(S^n)$ представляет собой проекцию на i-й сомножитель, получим, что $(f_1)_*(k) = (k, k, \dots, k)$. Аналогично, пусть $j_i : S^n \to V_d$ — отображение, переводящее S^n гомеоморфно в i-ю сферу букета. Композиция $f_2 \circ j_i$ гомотопна тождественному отображению, откуда $(f_2)_*(k_1, \dots, k_d) = k_1 + \dots + k_d$. Окончательно, $f_*(k) = (f_1)_* \circ (f_2)_*(k) = dk$. □

Аналогично доказывается

Предложение 2. *Пусть $f : V_a \to V_b$ — отображение букетов n-мерных сфер. Тогда гомоморфизм $f_* : H_n(V_a) = \mathbb{Z}^a \to \mathbb{Z}^b = H_n(V_b)$ задается матрицей (α_{st}), где α_{st} — степень отображения $p_t \circ f \circ j_s : S^n \to S^n$.*

Пусть X — клеточное пространство; обозначим q-й остов его символом X^q. Группой q-мерных клеточных цепей $\mathcal{K}_q(X)$ назовем абелеву группу, свободно порожденную q-мерными клетками пространства X. Определим гомоморфизм $\partial_q : \mathcal{K}_q(X) \to \mathcal{K}_{q-1}(X)$ следующим образом. Пусть $\sigma \subset X$ — q-мерная клетка. Тогда $\partial_q \sigma = \sum_\tau [\sigma : \tau]\tau$, где τ пробегает множество (конечное !) $(q-1)$-мерных клеток, лежащих в замыкании клетки σ, а числа $[\sigma : \tau] \in \mathbb{Z}$ определяются так. Пусть $f : D^q \to X$ — характеристическое отображение клетки σ, а $g : D^{q-1} \to X$ — характеристическое отображение клетки τ. Рассмотрим замыкание $\overline{\sigma}$ клетки σ, и стянем в нем все клетки, кроме τ, в точку; результат обозначим $X_{\sigma,\tau}$, а стандартную проекцию обозначим $\mu_{\sigma,\tau} : \overline{\sigma} \to X_{\sigma,\tau}$. По определению характеристического отображения, g порождает гомеоморфизм $\tilde{g} : S^{q-1} \to X_{\sigma,\tau}$. Пусть $h = f_{\partial D^q} : S^{q-1} \to \overline{\sigma} \subset X$. Определим число $[\sigma : \tau] \in \mathbb{Z}$ как степень композиции $\tilde{g}^{-1} \circ \mu_{\sigma,\tau} \circ h : S^{q-1} \to S^{q-1}$.

Основным результатом лекции является

Теорема 1. *Последовательность $\mathcal{K}(X) = \dots \xrightarrow{\partial_{q+1}} \mathcal{K}_q(X) \xrightarrow{\partial_q} \mathcal{K}_{q-1}(X) \xrightarrow{\partial_{q-1}} \dots$ представляет собой комплекс (он называется* клеточным комплексом пространства *X). Гомологии клеточного комплекса $\mathcal{K}(X)$ совпадают с сингулярными гомологиями пространства X.*

Для доказательства нам потребуется гомологическая интерпретация клеточного комплекса.

Предложение 3. *Группа $H_q(X^q, X^{q-1})$ изоморфна $\mathcal{K}_q(X)$. При $i \neq q$ группа $H_i(X^q, X^{q-1})$ тривиальна. Оператор $\partial_* : H_q(X^q, X^{q-1}) \to H_{q-1}(X^{q-1}, X^{q-2})$ из точной последовательности тройки (X^q, X^{q-1}, X^{q-2}) совпадает с оператором $\partial_q : \mathcal{K}_q(X) \to \mathcal{K}_{q-1}(X)$.*

Доказательство. Пространство X^q/X^{q-1} представляет собой букет q-мерных сфер, по одной на каждую q-мерную клетку пространства X. Равенство $H_i(X^q, X^{q-1}) = \tilde{H}_i(X^q/X^{q-1})$ доказывается так же, как и предложение 2 лекции 2.

Равенство $\partial_* = \partial_q$ вытекает из предложения 1. □

Доказательство. [теоремы 1]

□

Доказательство. [теоремы 1] Пусть $a \in \mathcal{C}_q(X^q)/\mathcal{C}_q(X^{q-1})$ — относительный цикл, т.е. у него существует такой представитель $\tilde{a} \in \mathcal{C}_q(X^q)$, что $\partial\tilde{a} \in \mathcal{C}_{q-1}(X^{q-1})$ (здесь ∂ — граничный оператор в цепном комплексе). Тогда $\partial\tilde{a}$, по определению — представитель элемента $\partial_q a \in \mathcal{C}_{q-1}(X^{q-1})/\mathcal{C}_{q-1}(X^{q-2})$. Представителем элемента $\partial_{q-1} \circ \partial_q a$ является, в свою очередь, элемент $\partial \circ \partial\tilde{a} = 0$, откуда $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$. Тем самым $\mathcal{K}(X)$ — комплекс, и мы можем вычислять его гомологии.

Докажем вначале, что $H_q(X) = H_q(X^{q+1})$. Если $i \geq q+2$, то $H_{q+1}(X^i, X^{i-1}) = 0$, и точная гомологическая последовательность пары (X^i, X^{i-1}) содержит фрагмент $0 = H_{q+1}(X^i, X^{i-1}) \to H_q(X^i) \to H_q(X^{i-1}) \to$

$H_q(X^i, X^{i-1}) = 0$. Если клеточное пространство X конечномерно, и N — максимальная размерность клетки, то $H_q(X^{q+1}) = H_q(X^{q+2}) = \dots = H_q(X^N) = H_q(X)$. Если клеточное пространство бесконечномерно, то заметим, что каждый образ произвольного сингулярного симплекса лежит в остове X^N с достаточно большим N (это следствие аксиомы (W) из определения клеточного пространства), поэтому рассуждение все равно проходит.

Теперь докажем равенство $H_q(X^{q+1}) = H_q(X^{q+1}, X^{q-2})$. Если $i \le q-2$, то гомологическая последовательность тройки (X^{q+1}, X^i, X^{i-1}) содержит фрагмент $0 = H_q(X^i, X^{i-1}) \to H_q(X^{q+1}, X^{i-1}) \to H_q(X^{q+1}, X^i) \to H_{q-1}(X^i, X^{i-1}) = 0$, откуда $H_q(X^{q+1}, X^{q-2}) \to H_q(X^{q+1}, X^{q-3}) = \dots = H_q(X^{q+1}, X^0) = H_q(X^{q+1})$ (здесь $q \ge 2$).

Покажем теперь, что $H_q(X^{q+1}, X^{q-2}) = H_q(\mathcal{K}(X))$. Для этого рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{K}_{q+1}(X) & & H_q(X^{q-1}, X^{q-2}) = 0 & & & & \\
\| & & \downarrow & & & & \\
H_{q+1}(X^{q+1}, X^q) & \xrightarrow{\partial_*} & H_q(X^q, X^{q-2}) & \xrightarrow{\alpha} & H_q(X^{q+1}, X^{q-2}) & \longrightarrow & H_q(X^{q+1}, X^q) \\
 & \partial_{q+1} \searrow & \downarrow \beta & & & & \| \\
 & & H_q(X^q, X^{q-1}) = \mathcal{K}_q(X) & & & & 0 \\
 & & \downarrow \partial_q & & & & \\
 & & H_{q-1}(X^{q-1}, X^{q-2}) = \mathcal{K}_{q-1}(X) & & & &
\end{array},$$

в которой строка — фрагмент точной последовательности тройки (X^{q+1}, X^q, X^{q-2}), а столбец — тройки $(X^{q+1}, X^{q-1}, X^{q-2})$. Из точности строки следует, что отображение α — эпиморфизм, откуда $H_q(X^{q+1}, X^{q-2}) = H_q(X^q, X^{q-2}) / \operatorname{Ker} \alpha = H_q(X^q, X^{q-2}) / \operatorname{Im} \partial_*$. Из точности столбца следует, что β — мономорфизм, откуда $H_q(X^q, X^{q-2}) / \operatorname{Im} \partial_* = \operatorname{Im} \beta / \beta(\operatorname{Im} \partial_*) = \operatorname{Im} \beta / \operatorname{Im} \partial_{q+1}$. В силу той же точности столбца получим $\operatorname{Im} \beta = \operatorname{Ker} \partial_q$, откуда, окончательно, $H_q(X^{q+1}, X^{q-2}) = \operatorname{Ker} \partial_q / \operatorname{Im} \partial_{q+1} = H_q(\mathcal{K}(X))$. □

Следствие 1. *Если $n > N$, где N — максимальная размерность клетки клеточного пространства X, то $H_n(X) = 0$.*

Следствие 2. *Если X — клеточное пространство с единственной вершиной, то группа $H_1(X)$ изоморфна фактору группы $\pi_1(X)$ по ее коммутанту (подгруппе, порожденной всеми элементами вида $aba^{-1}b^{-1}$, где $a, b \in \pi_1(X)$).*

Доказательство. Группа $\pi_1(X)$ порождена образующими σ, соответствующими одномерным клеткам, с соотношениями, порожденными ограничением характеристических отображений всех двумерных клеток на границу круга. Факторизация по коммутанту дополнительно означает, что мы накладываем соотношение $ab = ba$ на любые две образующих. Если теперь $f_\sigma : D^2 \to X$ — характеристическое отображение двумерной клетки σ, а $g_\sigma : S^1 \to X$ — его ограничение на границу, то после коммутирования соотношение принимает вид $\sum_\tau [\sigma : \tau] f_\tau = 0$, где сумма берется по всем одномерным клеткам τ, и $f_\tau : D^1 \to X$ — соответствующие характеристические отображения. Это в точности совпадает с соотношением для вычисления группы $H_1(X)$ посредством клеточного комплекса. □

На самом деле можно показать, что требование, чтобы X было клеточным и имело единственную вершину, излишне. Соответствующий более общий результат (теорема Пуанкаре) выводится из следствия 2. На практике для пространства X зачастую несложно найти гомотопически эквивалентное ему клеточное пространство Y с единственной вершиной; если такое Y найдено, то для пространства X следствие 2 вытекает из гомотопической инвариантности гомологий и фундаментальной группы.